

А. В. Караушев

538
1281

Речная гидравлика

КУРС ОБЩЕЙ
И СПЕЦИАЛЬНОЙ ГИДРАВЛИКИ
ДЛЯ ГИДРОЛОГОВ

Д о п у щ е н о

Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Гидрология суши»

230 006

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД, 1969

В книге дается систематическое изложение речной гидравлики, основных вопросов общей гидравлики и гидродинамики, имеющих прямое отношение к гидрологии и представляющих по ряду разделов ее теоретическую основу. Рассматриваются общие вопросы гидродинамики и гидростатики, излагается проблема турбулентности русловых потоков, движения в них наносов, вопросы формирования русла, заиления водохранилищ, теория и способы расчета равномерного, неравномерного и неустановившегося движения в реках и каналах, методы расчета течений и свободной поверхности рек и водохранилищ.

Книга является учебным пособием для студентов гидрометеорологических институтов, университетов (по специальности гидрологии), студентов институтов водного транспорта и др. Она может служить пособием и для аспирантов тех же профилей, инженеров-гидрологов и научных работников.

The author gives a systematized account of river hydraulics. The main problems of general hydraulics and hydrodynamics are discussed in terms of hydrology. Some problems of hydrodynamics and hydrostatics are described. An analysis is presented of the stream-flow turbulence, bed-load movement, river-bed formation, silting of water storage basins. The book contains the discussion of the uniform, non-uniform and non-steady movements in rivers and channels. Calculation technique for currents and free water surface of rivers & storage reservoirs is included.

The book is to be commended to the university and institute students in hydrology and water transport. It will prove of value to post-graduates, engineers and researchers in this field.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Введение в общую и речную гидравлику	9
§ 1. Предмет гидравлики. Гидравлика в гидрологии. Историческая справка (9). § 2. Свойства жидкостей. Силы и напряжения, действующие в жидкости (12). § 3. Уравнение неразрывности (19). § 4. Функция тока. Потенциальное движение (23). § 5. Дифференциальные уравнения движения жидкости. (26). § 6. Ламинарное и турбулентное движение жидкости (30). § 7. Спокойные и бурные потоки (34). § 8. Гидравлическая классификация движения воды в русловых потоках (36). § 9. Общая характеристика речных потоков (39). § 10. О внутренней структуре речных потоков (42).	
Глава II. Гидростатика	45
§ 1. Гидростатическое давление и его свойства (45). § 2. Уравнения равновесия покоящейся жидкости. Распределение давления в жидкости (48). § 3. Основное уравнение гидростатики. Способы выражения давления (50). § 4. Давление на стенки (55). § 5. Плавание тел (63).	
Глава III. Равномерное установившееся движение в трубах, каналах и реках	67
§ 1. Напорное и безнапорное движение жидкости. Уравнение равномерного движения в трубах (67). § 2. Уравнение равномерного установившегося движения открытого потока (72). § 3. Применение уравнения равномерного движения воды к речным потокам (77). § 4. Построение кривых расходов речных потоков (81). § 5. Применение уравнения равномерного движения к отдельным вертикалям речного потока. Расчет распределения скоростей по ширине потока (83).	
Глава IV. Теория турбулентности руслового потока	86
§ 1. Турбулентная пульсация. Схема переноса количества движения (86). § 2. Турбулентный перенос тепла (91).	

§ 3. Турбулентный перенос взвешенных и растворенных в воде веществ (93). § 4. Вывод формул касательного напряжения при уточненном представлении о пульсации (95). § 5. Формула коэффициента турбулентного обмена (99). § 6. Дифференциальные уравнения движения турбулентного потока. Дифференциальные уравнения ламинарного течения (100). § 7. Уравнения турбулентной диффузии и турбулентной теплопроводности (107). § 8. Граничные условия турбулентных потоков (111). § 9. Динамический и статистический подходы к изучению турбулентности. Исследования Маккавеева, Прандтля, Рейнольдса, Фридмана, Колмогорова (114).

Глава V. Структура турбулентного потока и динамическое подобие. 122

§ 1. Распределение осредненной скорости и коэффициента турбулентного обмена по вертикали (122). § 2. Пульсация скоростей, линейный масштаб турбулентности и коэффициент турбулентного обмена (130). § 3. Динамическое подобие открытых турбулентных и ламинарных потоков (134). § 4. Динамическое подобие и пульсация скорости (141).

Глава VI. Неравномерное движение жидкости в открытых потоках и трубах 144

§ 1. Уравнение неравномерного движения открытого потока (144). § 2. Уравнение неравномерного движения жидкости в трубе (151). § 3. Корректив распределения скорости в уравнении неравномерного движения (155). § 4. Вывод уравнения неравномерного движения из общих дифференциальных уравнений турбулентного потока (158).

Глава VII. Исследование уравнения неравномерного движения открытого потока 161

§ 1. Удельная энергия сечения и критическая глубина (161). § 2. Спокойное и бурное течение. Критическое состояние потока (164). § 3. Преобразование уравнения неравномерного движения потока в призматическом русле (166). § 4. Формы свободной поверхности потока при неравномерном движении жидкости (168). § 5. Гидравлический прыжок (176). § 6. Потери напора при внезапном расширении потока (181). § 7. Интегрирование уравнения неравномерного движения потока в открытом русле (183).

Глава VIII. Гидравлика водосливных и водомерных сооружений 187

§ 1. Истечение жидкости через отверстия и насадки (187). § 2. Истечение жидкости при переменном напоре (194). § 3. Истечение жидкости через водосливы (196). § 4. Истечение жидкости из-под щита (207).

Глава IX. Неравномерное течение в реках и методы расчета свободной поверхности	210
§ 1. Основные зависимости, используемые при изучении неравномерного течения в реках (210). § 2. Основной метод построения кривых свободной поверхности речных потоков (метод А. Н. Рахманова) (214). § 3. Методы построения кривых свободной поверхности, предложенные Н. Н. Павловским и Н. М. Бернадским (217). § 4. Построение свободной поверхности при учете поймы и бифуркации русла (221). § 5. Расчет понижения уровня водной поверхности на перекате при дноуглублении (225). § 6. Расчет расходов воды и кривых водной поверхности для зимних условий (метод переходных коэффициентов) (227). § 7. Некоторые гидрометрические вопросы (233).	
Глава X. Поперечные циркуляции и план течения речного потока	235
§ 1. Поперечные циркуляции и искусственное воздействие на структуру течений (235). § 2. Поперечные течения и уклон на закруглении русла (238). § 3. Поперечные течения, обусловленные вращением Земли (246). § 4. План течений и его построение по данным натурных измерений (248). § 5. Теоретический метод построения плана течений (250). § 6. Расчет течений методом интегральных кривых и построение донных и поверхностных струй (256).	
Глава XI. Неустановившееся движение воды в каналах и реках	260
§ 1. Определения. Основные уравнения (260). § 2. Распространение длинных волн при малых подъемах уровня в призматическом русле (263). § 3. Длинные волны конечной амплитуды. Метод характеристик (267). § 4. Метод мгновенных режимов (273).	
Глава XII. Распространение растворов и тепла в потоках	277
§ 1. Вводные замечания о перемешивании водных масс в реках (277). § 2. Уравнение установившейся турбулентной диффузии в форме конечных разностей (281). § 3. Учет граничных и начальных условий при расчете диффузии (286). § 4. Учет поперечных течений при расчете диффузии (289). § 5. Об определении створа достаточного перемешивания (293). § 6. Неустановившаяся диффузия (295). § 7. Расчет турбулентной теплопроводности (301).	
Глава XIII. Взвешивание и транспортирование наносов	303
§ 1. Общие сведения о речных наносах (303). § 2. Падение частиц в воде, гидравлическая крупность (310). § 3. Начальная скорость донного влечения, расход влекомых наносов (319). § 4. Теоретические исследования взвешивания наносов (327). § 5. Распределение мутности по вертикали (332). § 6. Активный слой русла, донные гряды и мутность взмыва (337). § 7. Транспортирующая способность потока (343). § 8. Баланс наносов участка реки и распределение мутности по длине потока (347).	
Глава XIV. Деформация речных русел	350
§ 1. Русловые процессы и динамическая классификация русел (350). § 2. Морфометрические соотношения (355). § 3. Продольный профиль динамически устойчивого русла (358). § 4. Расчет деформаций русла при наличии данных	

о мутности потока (360). § 5. Общие деформации русла при понижении базиса эрозии (364). § 6. Деформации на больших участках русла в нижнем бьефе гидроузла (367). § 7. Детальные методы расчета русловых деформаций на коротких участках реки (369). § 8. Методика расчета заиления водохранилищ. (371).

Глава XV. Вопросы динамики озер и водохранилищ 378

§ 1. Общие сведения о ветровом волнении (378). § 2. Уравнение баланса волновой энергии и методы расчета ветровых волн озер и водохранилищ (382). § 3. Виды течений озер и водохранилищ (387). § 4. Ветровые течения (388). § 5. Вдольбереговое волноприбойное течение (394). § 6. Сгоны и нагоны на озерах и водохранилищах (399). § 7. Взвешивание и транспортирование наносов в условиях волнового взмучивания (405). § 8. Процессы формирования берегов водохранилищ (408).

Литература 415

ПРЕДИСЛОВИЕ

Речная гидравлика, являющаяся профилирующей дисциплиной при подготовке гидрологов и гидротехников-речников, тесно связана с современной гидравликой. Такая неразрывная взаимосвязь речной и общей гидравлики положена в основу настоящей книги. В соответствии с этим и некоторые общие вопросы гидравлики излагаются с учетом особенностей речных потоков, что делает содержание книги более конкретным и близким гидрологам и гидротехникам, занимающимся естественными водными потоками.

Указанные соображения учтены при выборе названия книги «Речная гидравлика (курс общей и специальной гидравлики для гидрологов)». Ее содержание соответствует программе курса гидравлики, разработанного автором и читаемого на кафедре гидрологии ЛГУ. Оно несколько полнее программы курса общей и специальной (речной) гидравлики гидрометеорологических институтов, так как включает проблемы наносов, деформации русла, динамики водохранилищ и главное кардинальную проблему современной гидравлики — проблему турбулентности русловых потоков.

Теория турбулентности излагается в главах IV и V и рассматривается как неотъемлемая часть гидравлики. С уравнениями турбулентного потока в книге увязываются уравнения равномерного, а в последующих главах и неравномерного движения руслового потока. Теория турбулентности, раскрывая структуру руслового потока, приводит читателя к глубокому пониманию диссипативных процессов, а вместе с тем и особенностей равномерного, неравномерного и неустановившегося движения воды в реках, каналах и трубах. Эта теория подготавливает

читателя к изучению таких проблем, как поперечные течения, распространение растворов в потоках, движение наносов, формирование русла, динамика водохранилищ и т. д.

В книге излагаются теоретические и прикладные вопросы общей и речной гидравлики, получившие распространение в технической и учебной литературе. Одновременно рассматриваются результаты новых исследований и предложения по методике расчета. При изложении материала автор не считал необходимым уклоняться от дискуссионных вопросов.

Настоящая книга является учебным пособием для гидрометеорологических институтов, университетов, гидротехнических факультетов вузов и институтов водного транспорта. Она найдет применение и при подготовке аспирантов, а также сможет служить справочным пособием по гидравлике для гидрологов.

В составлении учебника приняли участие кандидат географических наук И. В. Боголюбова (главы II, VIII и § 1—3 главы X), кандидат технических наук А. Я. Шварцман (§ 5 главы XV), инж. В. В. Романовский (часть § 2 главы XIII).

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ И РЕЧНУЮ ГИДРАВЛИКУ

§ 1. Предмет гидравлики. Гидравлика в гидрологии. Историческая справка

Гидравлика — это наука, изучающая законы движения и равновесия жидкостей, прежде всего воды. В гидравлике широко используются теоретические методы, основанные на положениях механики и данных эксперимента. В прошлом гидравлика носила экспериментальный характер и являлась чисто прикладной наукой, в последние десятилетия ее теоретические основы получили значительное развитие, что явилось следствием сближения с гидромеханикой и разработки новых теоретических проблем, в первую очередь теории турбулентности. В современной гидравлике рассматриваются: условия равновесия жидкостей и плавающих тел в них, турбулентность потоков, равномерное и неравномерное течение в открытых потоках, неустановившееся течение, напорное движение, кинематическая структура потоков, истечение через отверстия, водосливы, взвешивание и движение наносов, русловые деформации, гидротермика, движение грунтовых вод, гидравлические машины и пр.

Весь этот комплекс вопросов объединяется гидравликой в широком смысле. Часть проблем комплекса имеет прямое отношение к речным потокам, а некоторые могут решаться применительно к ним; все они в этом случае объединяются под общим названием «речная гидравлика». Строго говоря, в том же смысле должна трактоваться и «динамика русловых потоков», однако в настоящее время часто делают различие между этими дисциплинами. Основными в речной гидравлике являются проблемы динамики и кинематики речного потока, переноса им наносов и формирования русла. При этом рассматривается не только бытовой режим, но и условия воздействия сооружений на реки.

Гидравлика тесно связана с гидрологией. Речную гидравлику можно рассматривать как часть гидрологии, которая, как известно, является дисциплиной, опирающейся в равной мере на разделы физико-географических и физико-математических наук. Необходимо учитывать, что при решении очень многих задач гидрологии нельзя обойтись без гидравлики. Так, в частности, большинство задач гидрометрии целиком основывается на гидравлике. Без использования гидравлики (построения кривых свободной поверхности) нельзя достаточно обоснованно составить водный баланс водохранилищ, решение вопросов уровня режима водохранилищ связано с гидравлическими задачами, численные методы оценки русловых деформаций основаны на гидравлических соотношениях, на них же основаны многие способы расчета термического и ледового режимов рек и водохранилищ.

Связь между гидравликой и гидрологией определяется тем, что гидравлика изучает законы движения воды и наносов в реках (в том числе и зарегулированных), а реки и водохранилища являются главными объектами гидрологии суши.

Остановимся кратко на развитии гидравлики. Решение одного из важных вопросов гидростатики относится к глубокой древности. Известный в науке трактат Архимеда «О плавающих телах» написан за два с половиной века до нашей эры. Дальнейшие серьезные разработки гидравлических проблем имели место более чем полторы тысячи лет спустя — в эпоху Возрождения. Здесь надо отметить исследования Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), изучавшего законы плавания, истечения из отверстий, движения жидкости по трубам и каналам; работы С. Стевина (1548—1620 гг.), написавшего начала гидростатики, Галилея (1564—1642 гг.), Торричелли (1608—1647 гг.) и Паскаля (1623—1662 гг.). Большое значение имела работа И. Ньютона (1642—1724 гг.), посвященная законам внутреннего трения в жидкостях. Последующие годы ознаменовались интенсивным развитием гидромеханики, которая, однако, в течение долгих лет не имела достаточной экспериментальной основы и во многих случаях не могла применяться к решению конкретных технических задач. Родоначальниками гидромеханики являются Леонард Эйлер (1707—1783 гг.), член Петербургской академии наук, и швейцарский ученый Даниил Бернулли (1700—1782 гг.).

Следует отметить, что развитие гидравлики шло параллельно с развитием механики. Не случайно, например, что вскоре после разработки Галилеем и Ньютоном теоретических основ механики Эйлером и Бернулли были выполнены теоретические обобщения в области механики сплошной среды (жидкости). Ставшие классическими уравнения этих ученых будут рассмотрены ниже в соответствующих разделах настоящего курса.

Развитие практической гидравлики протекало довольно быстро в конце XVIII и особенно в XIX в. Оно связано с име-

нами крупных исследователей-экспериментаторов Шези, Базена, Дарси и других, изучавших движение жидкости в каналах и трубах и давших ряд расчетных зависимостей; некоторые из этих зависимостей получили впоследствии теоретическое обоснование и широко используются до настоящего времени.

Разделение механики жидкостей на теоретическую науку — гидромеханику, или гидродинамику (как иногда говорят), и прикладную науку, опирающуюся главным образом на эксперимент, — гидравлику существовало в течение долгого времени. Отрыв гидромеханики от эксперимента привел к тому, что ряд выводов этой науки не оправдывался на практике. С другой стороны, поскольку гидравлика пользовалась теорией лишь в небольших пределах, возможности этой науки были ограниченными, а ее развитие замедленным.

Интерес к гидравлике, возникший в начале текущего столетия в связи с большим размахом гидротехнического строительства, оживил эту науку и способствовал ее приближению к теоретической гидромеханике.

Следует упомянуть некоторых деятелей науки, способствовавших развитию гидромеханики и гидравлики в XIX в. Крупнейший вклад внесли Л. Навье и Дж. Стокс, исследовавшие вопрос о гидравлическом сопротивлении. В результате этих исследований предложены уравнения движения, учитывавшие сопротивление, возникающее благодаря действию сил молекулярной вязкости. Следующим важным шагом вперед были исследования Буссинеска, предложившего уравнения движения для турбулентного потока, составленные по аналогии с уравнениями Навье — Стокса. Им же исследовано неустановившееся, т. е. изменяющееся во времени, движение. Переходя к более позднему периоду, отметим крупные работы О. Рейнольдса (1842—1912 гг.), а затем и Л. Прандтля (1875—1953 гг.) в области теории турбулентного движения.

Большой вклад в развитие гидравлики внесен отечественными учеными: Н. Е. Жуковским, Б. А. Бахметевым, Н. Н. Павловским, Н. М. Бернадским, создателем оригинальной гидравлики рек, В. М. Маккавеевым, разработавшим теорию турбулентности русловых потоков и давшим целый ряд решений во многих областях гидравлики, С. А. Христиановичем — автором теории и методики расчета неустановившегося движения жидкости, М. А. Великановым и В. Н. Гончаровым, изучавшими турбулентность русловых потоков, а также предложившими ряд оригинальных решений, и многими другими учеными, с именами и работами которых читатели познакомятся в настоящем курсе.

Зарождение собственно речной гидравлики связано с деятельностью отечественных ученых В. М. Лохтина, А. И. Лосиевского, М. В. Потапова, В. Г. Глушкова, рассмотревших вопросы структуры течений рек и взаимодействия потока и русла.

Достаточно полное развитие проблем речной гидравлики осуществлено в трудах Н. М. Бернадского, В. М. Маккавеева, И. И. Леви, М. А. Великанова, В. Н. Гончарова и др.

Последние десятилетия ознаменовались интенсивным процессом слияния гидравлики и гидромеханики. Этому способствовало бурное развитие гидротехнического строительства, потребовавшего качественно нового уровня методики расчета потоков и сооружений. Слиянию указанных дисциплин способствовали работы Л. Прандтля, Ф. Форхгеймеера и главным образом В. М. Маккавеева. Современная гидравлика — это наука, имеющая теоретическую базу в виде законов теоретической механики, уравнений гидромеханики, теории турбулентности, широко использующая эксперимент и данные натурных исследований, объединяющая большой круг проблем, краткий перечень которых был дан выше.

§ 2. Свойства жидкостей. Силы и напряжения, действующие в жидкости

Жидкости и газы являются такими физическими телами, которые не имеют собственной формы, а принимают форму занимаемого ими сосуда. Капельные жидкости и газы различаются прежде всего степенью сжимаемости. Газы обладают большой сжимаемостью. При изменении давления они изменяют свой объем, а вместе с тем и удельный вес и заполняют весь предоставленный им объем. Жидкости весьма слабо сжимаемы, их удельный вес при сжатии практически не изменяется. В зависимости от количества капельной жидкости она может заполнить весь сосуд или же часть его, при этом всегда имеется выраженная свободная поверхность, ограничивающая жидкость с той стороны, где она не соприкасается со стенками сосуда.

Температурное изменение удельного веса жидкостей несравнимо меньше, чем газа. В табл. 1.1 приводятся численные значения удельного веса воды; разумеется, при этом нет необходимости уделять внимание каким-либо другим жидкостям, поскольку настоящий курс посвящен исключительно изучению движения воды. Надо, конечно, заметить, что гидравлические закономерности, устанавливаемые для воды, могут быть отнесены и к другим жидкостям при учете соответствующих физических констант, характеризующих данную жидкость. Удельный вес воды γ выражается отношением веса некоторого количества воды к занимаемому им объему. Размерность γ в разных системах единиц приведена в табл. 1.1.

Удельный вес жидкости может быть выражен через ее плотность, которая равна массе жидкости, заключенной в единице объема. Размерность плотности показана в табл. 1.1. Если через ρ обозначить плотность воды, то получаем соотношение

$$\gamma = \rho g \quad (1.1)$$

или

$$\rho = \frac{\gamma}{g},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Одним из важнейших свойств жидкостей является вязкость. Вязкостью называется способность жидкости оказывать сопротивление касательным усилиям. Она обусловлена силами сцепления между частицами жидкости, а также между жидкостью и ограничивающими ее стенками и количественно выражается через коэффициент вязкости μ (табл. 1.1). При изменении температуры изменяется сила сцепления между молекулами жидкости, в связи с этим изменяется и вязкость. Коэффициент вязкости, отнесенный к плотности жидкости, называется кинематическим коэффициентом вязкости ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.2)$$

Хотя встречающиеся в природе жидкости, в том числе и вода, характеризуются сжимаемостью и вязкостью, тем не менее в большинстве случаев в гидравлике (за исключением некоторых специальных задач) сжимаемость воды не учитывается, что не приводит к каким-либо неточностям решения. В ряде задач не учитывается и вязкость жидкости. Необходимо заметить, что имеется и такой обширный класс задач, в которых учитывается не та физическая вязкость, о которой речь шла выше, а более значительные вязкостные силы, возникающие в потоках при особом характере их движения, именуемом турбулентным.

Используемая в некоторых задачах гидравлики и гидромеханики теоретическая модель жидкости, отличающейся несжимаемостью и отсутствием вязкости, носит название идеальной жидкости. В настоящем курсе эта модель используется лишь весьма ограниченно.

Рассмотрим теперь детально силы и напряжения, которые действуют в реальных жидкостях. Напряжением, как известно, называется предел отношения силы к поверхности, на которую она действует.

Различают нормальные и касательные силы и напряжения. Само название указывает, что нормальная сила (или напряжение) — это сила (или напряжение), действующая по нормали к поверхности (рис. 1.1).

Нормальной силой в жидкости является давление, которое в покоящейся жидкости называется гидростатическим, а в движущейся — гидродинамическим. Суммарное давление P (сила), действующее на некоторую поверхность ω , может быть выражено посредством напряжения p , называемого давлением. Давление определяется следующим пределом:

$$p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{P}{\omega} \right) = \frac{dP}{d\omega}. \quad (1.3)$$

Физические константы воды в разных системах единиц [системы единиц МТС
силы

Величина	Система единиц	Размерность	Температура в гра	
			0	4
Удельный вес γ	СИ	$н/м^3$	$0,98049 \cdot 10^4$	$0,98062 \cdot 10^4$
	МКГСС	$кг^*/м^3$	$0,99984 \cdot 10^3$	$0,99997 \cdot 10^3$
	СГС	$дин/см^3$	$0,98049 \cdot 10^3$	$0,98062 \cdot 10^3$
	внеси- стем- ные	$мт^*с$ $т^*/м^3$	$0,99984$	$0,99997$
		$мтс$ $т/м^2 сек^2$	$0,98049 \cdot 10$	$0,98062 \cdot 10$
Плотность ρ	СИ	$кг/м^3$	$0,99984 \cdot 10^3$	$0,99997 \cdot 10^3$
	МКГСС	$кг/м^3$		
	СГС	$г/см^3$	$0,99984$	$0,99997$
	внеси- стем- ные	$мт^*с$ $т^* сек^2/м^4$	$0,98051 \cdot 10^{-1}$	$0,98063 \cdot 10^{-1}$
		$мтс$ $т/м^3$	$0,99984$	$0,99997$
Кинематиче- ская вязкость ν	СИ	$м^2/сек$	$0,17968 \cdot 10^{-5}$	$0,15670 \cdot 10^{-5}$
	МКГСС	$м^2/сек$		
	СГИ	$см^2/сек$ (стоксы)	$0,17968 \cdot 10^{-1}$	$0,15670 \cdot 10^{-1}$
Динамическая вязкость μ	СИ	$н сек/м^2$	$0,17965 \cdot 10^{-2}$	$0,15667 \cdot 10^{-2}$
	МКГСС	$кг^*сек/м^2$	$0,18319 \cdot 10^{-3}$	$0,15976 \cdot 10^{-3}$
	СГС	$г/см сек$ (пуазы)	$0,17965 \cdot 10^{-1}$	$0,15667 \cdot 10^{-1}$
	внеси- стем- ные	$мт^*с$ $т^* сек/м^2$	$0,18319 \cdot 10^{-6}$	$0,15976 \cdot 10^{-6}$
		$мтс$ $т/м сек$	$0,17965 \cdot 10^{-5}$	$0,15667 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1.1

и $мг^*с$ отнесены к внесистемным. Через $г^*$, $кг^*$ и $г^*$ обозначены единицы (веса)]

дусах Цельсия			Переходный коэффициент, связывающий данную систему с системой СИ
10	20	50	
$0,98035 \cdot 10^4$	$0,97888 \cdot 10^4$	$0,96892 \cdot 10^4$	
$0,99970 \cdot 10^3$	$0,99820 \cdot 10^3$	$0,98804 \cdot 10^3$	$1 \text{ кг}^*/\text{м}^3 = 9,80665 \text{ н}/\text{м}^3$
$0,98035 \cdot 10^3$	$0,97888 \cdot 10^3$	$0,96892 \cdot 10^3$	$1 \text{ дин}/\text{см}^3 = 1 \cdot 10 \text{ н}/\text{м}^3$
$0,99970$	$0,99820$	$0,98804$	$1 \text{ г}^*/\text{м}^3 = 9806,65 \text{ н}/\text{м}^3$
$0,98035 \cdot 10$	$0,97888 \cdot 10$	$0,96892 \cdot 10$	$1 \text{ г}/\text{м}^2 \text{ сек}^2 = 1 \cdot 10^3 \text{ н}/\text{м}^3$
$0,99970 \cdot 10^3$	$0,99820 \cdot 10^3$	$0,98804 \cdot 10^3$	
$0,99970$	$0,99820$	$0,98804$	$1 \text{ г}/\text{см}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
$0,98037 \cdot 10^{-1}$	$0,97890 \cdot 10^{-1}$	$0,96894 \cdot 10^{-1}$	$1 \text{ г}^* \text{ сек}^2/\text{м}^4 = 9806,65 \text{ кг}/\text{м}^3$
$0,99970$	$0,99820$	$0,98804$	$1 \text{ г}/\text{м}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
$0,13111 \cdot 10^{-5}$	$0,10068 \cdot 10^{-5}$	$0,05558 \cdot 10^{-5}$	
$0,13111 \cdot 10^{-1}$	$0,10068 \cdot 10^{-1}$	$0,0558 \cdot 10^{-1}$	$1 \text{ стокс} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}$
$0,13107 \cdot 10^{-2}$	$0,10050 \cdot 10^{-2}$	$0,05492 \cdot 10^{-2}$	
$0,13365 \cdot 10^{-3}$	$0,10248 \cdot 10^{-3}$	$0,05600 \cdot 10^{-3}$	$1 \text{ кг}^* \text{ сек}/\text{м}^2 = 9,80665 \text{ н сек}/\text{м}^2$
$0,13107 \cdot 10^{-1}$	$0,10050 \cdot 10^{-1}$	$0,05492 \cdot 10^{-1}$	$1 \text{ пуаз} = 0,1 \text{ н сек}/\text{м}^2$
$0,13365 \cdot 10^{-6}$	$0,10248 \cdot 10^{-6}$	$0,05600 \cdot 10^{-6}$	$1 \text{ г}^* \text{ сек}/\text{м}^2 = 9806,65 \text{ н сек}/\text{м}^2$
$0,13107 \cdot 10^{-5}$	$0,10050 \cdot 10^{-5}$	$0,05492 \cdot 10^{-5}$	$1 \text{ г}/\text{м сек} = 1 \cdot 10^3 \text{ н сек}/\text{м}^2$

В некоторых технических задачах в настоящее время рассматриваются и растягивающие напряжения в жидкости.

Касательные силы (и напряжения) действуют вдоль поверхности, а если поверхность криволинейна, то по касательной к ней. Касательные силы — это силы сдвига, среза, взаимного трения смежных слоев жидкости. На рис. 1.1 схематически показано возникновение касательного напряжения τ на границе двух движущихся с различными скоростями слоев вязкой жидкости по линии mn .

Касательное напряжение возникает в результате действия вязких сил в жидкости. Физическая вязкость жидкости определяет внутреннее трение в так называемых ламинарных потоках.

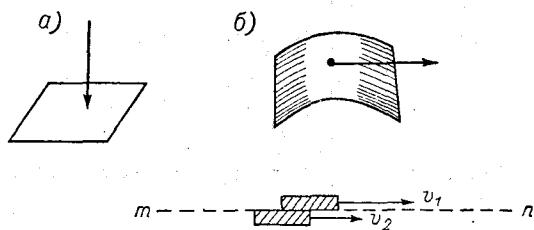


Рис. 1.1. Нормальное (а) и касательное (б) напряжения. Схема возникновения касательного напряжения на границе (mn) двух слоев жидкости, движущихся с разными скоростями ($v_1 > v_2$).

Величина касательного напряжения в этом случае может быть выражена следующим приближенным уравнением Ньютона:

$$\tau_{\text{молек}} = -\mu \frac{dv}{dn}, \quad (1.4)$$

где μ — коэффициент физической (молекулярной) вязкости, а $\frac{dv}{dn}$ — производная скорости по нормали к поверхности, на которую действует напряжение. Такой поверхностью может быть воображаемая внутри потока поверхность, параллельная направлению течения. Ось n направлена в сторону убывающих значений скорости v , поэтому уравнение содержит знак минус. В турбулентных потоках силы внутренней вязкости зависят от структуры потока. Для этого случая можно написать

$$\tau_{\text{турб}} = -A \frac{dv}{dn}. \quad (1.5)$$

Здесь A — коэффициент турбулентной вязкости; его величина определяется размером потока, скоростью течения, шерохова-

тостью русла и не зависит от температуры. Заметим, что A обычно оказывается несравненно больше, чем μ .

Кроме поверхностных сил, в жидкости действуют массовые силы, называемые иногда объемными. Действие массовой силы на каждую частицу жидкости или на выделенный внутри жидкости элемент пропорционально массе этой частицы или соответственно элемента. Массовой силой является сила тяжести. Силы инерции также относятся к массовым (объемным), что представляет особое удобство при использовании начала д'Аламбера.

Если массу выделенного объема жидкости обозначить через M , то сила тяжести, действующая на него, определится равенством

$$F = Mg,$$

где g — ускорение силы тяжести, численно равное $9,81 \text{ м/сек}^2$, или 981 см/сек^2 . Для единицы объема жидкости вместо этого выражения будем иметь

$$\gamma = \rho g,$$

т. е. уже знакомое нам соотношение.

В табл. 1.1 приведены размерности величин γ , ρ , ν и μ в разных системах единиц. На первом месте помещена международная система СИ, введенная в СССР с 1/1 1963 г. для предпочтительного применения перед другими системами единиц. В гидрологии и гидравлике укоренилась так называемая техническая система единиц, использующая как основные единицы измерения m , t^* (тонна, как единица силы) и $сек$; она рассматривается в настоящее время как «внесистемная». Применение ее при решении многих задач гидравлики представляет значительное удобство, поэтому отказываться от нее в гидравлике и гидрологии в настоящее время нецелесообразно. Представляется необходимым, однако, указать численные соотношения между основными величинами, встречающимися в гидравлике, выраженными в рассматриваемой системе и в системе СИ. Такие соотношения даны в табл. 1.1.

Имеет распространение также и так называемая физическая система единиц, основанная на единицах m , t (тонна, как единица массы) и $сек$. В той же таблице даны переходные множители от этой системы к системе СИ. Таким образом, пользующийся настоящей книгой учащийся или специалист может применять любую систему единиц и переходить от одной системы к другой по данным табл. 1.1. Подробные сведения о системах единиц содержатся в книгах В. В. Кириллова «Международная система единиц измерений (СИ) в метеорологии» [13] и Е. П. Субботиной «Сборник физических констант и параметров» [28].

Основными единицами системы СИ являются: метр (m), килограмм (kg) — единица массы и секунда ($сек$). Единица силы является производной и устанавливается по формуле

$$F = ma,$$

где F — сила, m — масса тела, a — ускорение

$$1 \text{ СИ } (F) = 1 \text{ кг} \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ сек}^2} = 1 \frac{\text{кг м}}{\text{сек}^2} = 1 \text{ н} \quad (1.6)$$

(через n обозначается ньютон — единица силы в системе СИ). Один ньютон — это сила, которая сообщает телу, имеющему массу 1 кг , ускорение, равное 1 м/сек^2 . Размерность силы в СИ может быть выражена двояко: 1) n (если за основу желательно взять силу) или 2) кгм/сек^2 (если за основу берется масса). Это замечание является необходимым дополнением к табл. 1.1.

Остановимся еще кратко на выражении размерностей в так называемых физических и технических системах.

В физической системе плотность ρ имеет размерность г/см^3 (или т/м^3), где $г$ — грамм-масса, $т$ — тонна-масса. Составим размерность удельного веса γ

$$\gamma = \rho g.$$

Пользуясь этим равенством, напомним соотношение размерностей

$$|\gamma| = |\rho| |g| = \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} = \frac{\text{г}}{\text{см}^2 \text{сек}^2}.$$

В системе $m, t, \text{сек}$ имеем

$$|\gamma| = \frac{t}{m^2 \text{сек}^2}.$$

Если за основу берется единица силы ($г^*$ — грамм-сила, или $т^*$ — тонн-сила), то производной будет размерность плотности, поэтому записываем

$$|\rho| = \left| \frac{\gamma}{g} \right| = \frac{г^*}{\text{см}^3} \cdot \frac{\text{сек}^2}{\text{см}} = \frac{г^* \text{сек}^2}{\text{см}^4}$$

или в системе $m, t^*, \text{сек}$

$$|\rho| = \frac{t^* \text{сек}^2}{m^4}.$$

Касательное напряжение τ равно силе, отнесенной к площади ω , на которую оно действует. Поэтому для системы СИ можно написать

$$|\tau| = \left| \frac{F}{\omega} \right| = \frac{n}{m^2},$$

или, учитывая, что $|F| = \kappa \text{ г м/сек}^2$,

$$|\tau| = \frac{\kappa \text{ г}}{\text{м сек}^2}$$

В системе м, т, сек (физическая), где $|F| = \tau \text{ м/сек}^2$, будем иметь

$$|\tau| = \frac{\tau}{\text{м сек}^2},$$

а в системе $\text{м, т}^*, \text{сек}$ (техническая)

$$|\tau| = \frac{\tau^*}{\text{м}^2}.$$

Размерность коэффициента вязкости находится при использовании формулы

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dn},$$

где n — нормаль к площадке, для которой определяется касательное напряжение τ . Очевидно, что

$$|\mu| = \frac{|\tau|}{\left| \frac{dv}{dn} \right|}.$$

В системе СИ будем иметь

$$|\mu| = \frac{\text{н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{сек}}} = \frac{\text{н сек}}{\text{м}^2}.$$

Размерность μ в других системах дана в табл. 1.1. Там же дана и размерность кинематического коэффициента вязкости.

Как видим, кинематический коэффициент вязкости в физической и технической системах единиц имеет одну размерность. Следует иметь в виду, что динамический и кинематический коэффициенты турбулентной вязкости (соответственно A и $\frac{1}{\rho} A$) имеют такие же выражения размерности, как и соответствующие коэффициенты физической вязкости воды (μ и ν).

§ 3. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности, которое будет записано ниже в трех различных видах, для различных случаев выводится путем составления баланса жидкости для выделяемых контрольных объемов. Жидкость считаем несжимаемой, т. е. принимаем $\rho = \text{const}$.

Выделим в открытом потоке контрольный объем жидкости в виде параллелепипеда размером $H dz dx$ (рис. 1.2), где H — высота объема, равная полной глубине потока в начальный момент времени на рассматриваемом участке, а dz и dx соответственно поперечный и продольный размеры объема. Основание параллелепипеда $dz dx$ предполагается параллельным координатной плоскости xoz . Высота параллелепипеда параллельна оси y . Введем вспомогательную ось ζ , параллельную оси y , с некоторой произвольной точкой начала отсчета 0 . Эта ось будет служить для фиксации отметки (уровня) водной поверхности, которая по условиям задачи будет изменяться во времени t .

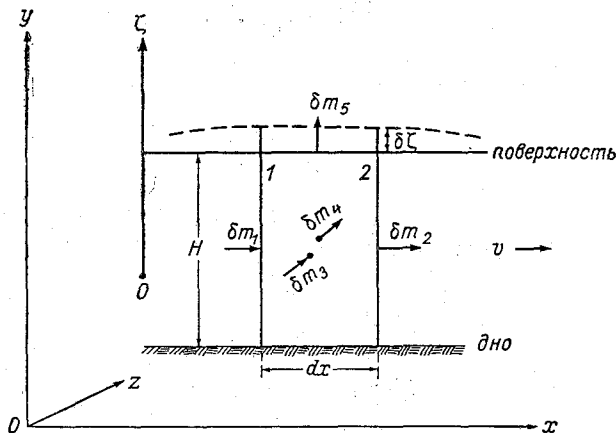


Рис. 1.2. Схема к выводу уравнения неразрывности.

Положим, что за некоторый интервал времени dt уровень воды над контрольным объемом изменился на $d\zeta$, причем полная высота объема стала равной $H + d\zeta$. Выясним, как связано это изменение с величинами средних по глубине продольной составляющей скорости $v_{x\text{ ср}}$ и поперечной $v_{z\text{ ср}}$ на гранях параллелепипеда.

Пометим грани параллелепипеда номерами 1, 2, 3 и 4 (рис. 1.2). Значения массы воды, поступающей в контрольный объем через грани 1 и 3 за время dt , обозначим соответственно через δm_1 и δm_3 , а значения массы, выходящей из этого же объема через грани 2 и 4 за время dt , — через δm_2 и δm_4 . В случае неравенства нулю суммы алгебраических значений этих четырех величин за время dt произойдет изменение уровня воды на величину $d\zeta$.

Для выделенного объема составим уравнение баланса жидких масс

$$\delta m_1 - \delta m_2 + \delta m_3 - \delta m_4 - \frac{\gamma}{g} dx dz d\zeta = 0. \quad (1.7)$$

Составляющие баланса выразятся следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \delta m_1 &= \frac{\gamma}{g} H v_{x \text{ ср}} dz dt; \\ \delta m_2 &= \frac{\gamma}{g} H \left(v_{x \text{ ср}} + \frac{\partial v_{x \text{ ср}}}{\partial x} dx \right) dz dt; \\ \delta m_3 &= \frac{\gamma}{g} H v_{z \text{ ср}} dx dt; \\ \delta m_4 &= \frac{\gamma}{g} H \left(v_{z \text{ ср}} + \frac{\partial v_{z \text{ ср}}}{\partial z} dz \right) dx dt, \end{aligned} \right\} (1.8)$$

в которых величины $v_{x \text{ ср}}$ и $v_{z \text{ ср}}$ выражают средние значения проекций (компонентов) скорости соответственно на гранях 1 и 3. Средние значения компонентов скорости на гранях 2 и 4 определяются соответственно следующими суммами:

$$v_{x \text{ ср}} + \frac{\partial v_{x \text{ ср}}}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad v_{z \text{ ср}} + \frac{\partial v_{z \text{ ср}}}{\partial z} dz.$$

Приращение уровня определим через его частную производную, т. е. напишем

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt.$$

Подставим это выражение, а также равенства (1.8) в уравнение баланса

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{g} H v_{x \text{ ср}} dz dt - \frac{\gamma}{g} H \left(v_{x \text{ ср}} + \frac{\partial v_{x \text{ ср}}}{\partial x} dx \right) dz dt + \\ & + \frac{\gamma}{g} H v_{z \text{ ср}} dx dt - \frac{\gamma}{g} H \left(v_{z \text{ ср}} + \frac{\partial v_{z \text{ ср}}}{\partial z} dz \right) dx dt = \\ & = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dz dt. \end{aligned}$$

После простых преобразований получаем следующее уравнение неразрывности движения жидкости:

$$\frac{\partial v_{x \text{ ср}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{z \text{ ср}}}{\partial z} = - \frac{1}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Если ось x принять совпадающей с направлением течения потока, а контрольный объем (рис. 1.2) увеличить по ширине таким образом, чтобы он охватывал всю ширину потока (реки), то в уравнении (1.9) будет отсутствовать второй член левой части, при этом $v_{x \text{ ср}}$ будет обозначать среднюю скорость во всем

поперечном сечении потока, а H — его среднюю глубину. Уравнение (1.9) принимает следующий вид:

$$H_{\text{ср}} \frac{\partial v_{\text{ср}}}{\partial x} = - \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Индекс « x » при $v_{\text{ср}}$ опускаем, так как другие компоненты скорости отсутствуют, и продольная компонента v_x ср совпадает с направлением течения.

Расход воды Q , протекающий через сечение потока, определяется соотношением

$$Q = \omega v_{\text{ср}} = H_{\text{ср}} B v_{\text{ср}},$$

в котором ω — площадь поперечного сечения, равная произведению средней глубины $H_{\text{ср}}$ на ширину потока B . Умножая уравнение (1.10) на B и учитывая последнее из написанных равенств, получаем следующий вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1.11)$$

В таком виде уравнение неразрывности широко используется при изучении изменяющегося во времени (неустановившегося) движения в открытых потоках, в том числе и в реках. Для случая установившегося движения, т. е. когда $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, уравнение приобретает чрезвычайно лаконичный вид

$$\frac{dQ}{dx} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$Q_{\text{I}} = Q_{\text{II}} = \text{const},$$

или

$$B_{\text{I}} H_{\text{ср I}} v_{\text{ср I}} = B_{\text{II}} H_{\text{ср II}} v_{\text{ср II}} = \text{const}.$$

Здесь индексами «I» и «II» обозначены величины, относящиеся соответственно к двум последовательно расположенным поперечным сечениям потока, между которыми нет бокового притока.

Выведем теперь условие неразрывности для элементарного объема жидкости $dx dz dy$, находящегося под свободной поверхностью на некотором расстоянии от дна. Составляющие прихода и расхода масс жидкости для вертикальных граней параллелепипеда δm_1 , δm_2 и δm_4 будут определяться соотношениями, аналогичными формулам (1.8), но вместо H высота параллелепипеда будет выражаться через dy , а средние на гранях компоненты скорости — местными значениями компонентов v_x и v_y . Последний член уравнения (1.7) заменяется разностью $\delta m_5 - \delta m_6$, в которой уменьшаемое выражает массу воды, по-

ступившую в контрольный объем через верхнюю грань $dx dz$ за время dt , а вычитаемое — массу воды, вышедшую из объема за то же время через нижнюю грань $dx dz$. Величины, образующие указанную разность, выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta m_5 &= \frac{\gamma}{g} v_y dx dz dt; \\ \delta m_6 &= \frac{\gamma}{g} \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dz dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Подставляем в уравнение баланса значения всех шести членов δm и после преобразований находим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.13)$$

В таком виде уравнение неразрывности используется при решении пространственных задач кинематики жидкости.

§ 4. Функция тока. Потенциальное движение

Движение жидкости, изменяющееся в направлении трех взаимно перпендикулярных координатных осей, называется трехмерным или пространственным. Движение жидкости, не изменяющееся в направлении одной из координатных осей при равенстве нулю компоненты скорости по этой оси, называется плоским. Если, например, движение неизменно вдоль оси z , а $v_z = 0$, то движение будет тождественным для всех плоскостей, параллельных плоскости $z = 0$. Уравнение неразрывности, отвечающее этому случаю, записывается в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.14)$$

Рассмотрим некоторую функцию ψ , полный дифференциал которой выражается следующим образом:

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt. \quad (1.15)$$

Учитывая, что вообще выражение полного дифференциала записывается в виде

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt, \quad (1.16)$$

приходим к следующим важным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -v_y; \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= v_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

В условиях существования функции ψ будем иметь следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Второе и третье из этих равенств являются тождествами, а первое при учете соотношений (1.17) дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

что соответствует уравнению (1.14).

Функция ψ имеет определенный кинематический смысл, который выясняется из следующих соображений. Рассмотрим семейство кривых, получаемое для определенного момента времени $t = \text{const}$ на основании функции ψ ,

$$\psi(x, y) = \text{const} = \psi_c.$$

Дифференцирование этого выражения и сопоставление с соотношениями (1.17) позволяют получить равенство

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy = 0, \quad (1.19)$$

приводящее непосредственно к зависимости

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \text{tg } \alpha. \quad (1.20)$$

В результате получили, что угол α определяет как касательную к кривой ψ , так и направление скорости потока для любой избранной точки. Это значит, что в любой точке неизменного во времени плоского потока кривая ψ совпадает с направлением скорости (течения) и определяет траекторию движения, в связи с чем функцию ψ называют функцией тока.

Остановимся теперь на понятии потенциального движения. Прежде всего заметим, что пространство, каждая точка которого характеризуется определенным значением скорости (величины и направления), называется полем скоростей, которое является векторным полем (его следует отличать от скалярного поля, образуемого скалярными величинами). Исследование векторного поля потока отличается значительной сложностью, поэтому в гидродинамике (гидравлике) широко используется прием, позволяющий заменить изучение векторного поля изучением ска-

лярного поля. При этом вводится некоторая потенциальная функция. Векторное поле скорости лишь при определенном характере движения может быть описано потенциальной функцией, обозначаемой через φ . Такой вид движения жидкости называется потенциальным.

Потенциальная функция скоростного поля потока является скаляром и определяется равенствами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z. \quad (1.21)$$

Продифференцировав первое из этих равенств по y , а второе по x , находим соответственно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.22)$$

и

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (1.23)$$

Вычитая выражение (1.22) из формулы (1.23), получаем

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (1.24)$$

Таким же образом находим

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad (1.25)$$

и

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (1.26)$$

В общем случае движения жидкости векторные величины, стоящие в левой части приведенных выше равенств (1.24)—(1.26), могут быть не равны нулю, при этом они будут выражать соответствующие компоненты удвоенной величины угловой скорости ($\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$) вращения элементарного объема жидкости, т. е.

$$\left. \begin{aligned} 2\Omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ 2\Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \\ 2\Omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Выражения (1.24)—(1.26), являющиеся условием существования потенциальной функции φ , показывают, что при

потенциальном движении в потоке отсутствуют угловые скорости элементарных объемов, т. е.

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0. \quad (1.28)$$

Величины Ω_x , Ω_y и Ω_z являются компонентами вихря скорости.

Таким образом, равенство (1.28) определяет основное свойство потенциального движения жидкости.

§ 5. Дифференциальные уравнения движения жидкости.

Выделим мысленно внутри потока контрольный объем жидкости, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и рас-

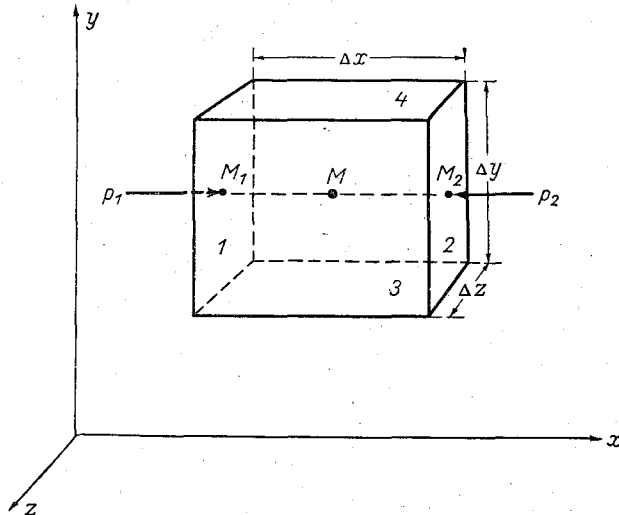


Рис. 1.3. Схема к выводу уравнения движения.

смотрим действующие на него силы. Стороны параллелепипеда Δx , Δy , Δz параллельны координатным осям x , y , z декартовой системы координат (рис. 1.3).

На замкнутую в параллелепипеде жидкость действуют следующие силы: массовая сила F (например, сила тяжести); поверхностные нормальные силы гидродинамического давления, действующие на все грани параллелепипеда; касательные силы внутреннего трения. Не анализируя на первой стадии изучения движения жидкости природу сил внутреннего трения, будем учитывать их чисто формально, относя их к массе выделенного объема жидкости.

Под влиянием действующих сил масса, сосредоточенная в контрольном объеме, получит ускорение. Составляя уравнение

равновесия действующих сил, будем учитывать ускорение путем введения силы инерции (согласно началу д'Аламбера).

Масса выделенного объема жидкости δm определяется произведением

$$\delta m = \frac{\gamma}{g} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (1.29)$$

где γ — удельный вес жидкости, g — ускорение силы тяжести; частное от деления первой величины на вторую дает плотность ρ .

Если через X, Y, Z обозначить проекции ускорения массовой силы F , то компоненты этой силы выразятся соответственно равенствами:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \delta m X; \\ F_y &= \delta m Y; \\ F_z &= \delta m Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Пусть давление в центре тяжести параллелепипеда, т. е. в точке M , равно p . Давление на грани параллелепипеда будем выражать через давление в центре тяжести и его приращения на отрезках $\frac{1}{2} \Delta x$, $\frac{1}{2} \Delta y$ и $\frac{1}{2} \Delta z$, определяющие расстояния между точкой M и серединой соответствующей грани. Номера четырех граней показаны на рис. 1.3, номера грани δ , обращенной от нас и совпадающей с плоскостью чертежа, и грани ϵ , обращенной к нам, на рисунке не показаны. Величины давления на грани определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}; & p_2 &= p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}; \\ p_3 &= p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}; & p_4 &= p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}; \\ p_5 &= p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}; & p_6 &= p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

при составлении которых учтены положительные направления соответствующих координатных осей, что и привело к получению чередования знаков плюс и минус перед членами, учитывающими приращения давления.

Полное давление P на каждую из граней выразится произведением соответствующего давления p на площадь грани, т. е. будем иметь

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \text{ и т. д. } \dots \\ \dots P_6 &= \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Компоненты силы трения T , которые обозначим через T_x , T_y и T_z , будем выражать следующими произведениями:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= gf_x \delta m; \\ T_y &= gf_y \delta m; \\ T_z &= gf_z \delta m, \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

где f_x , f_y и f_z — безразмерные коэффициенты пропорциональности, принимающие различные значения в каждой точке потока и в общем случае изменяющиеся во времени. Произведение gf_x выражает проекцию на ось x силы сопротивления, отнесенной к единице массы перемещающегося объема, иными словами, это есть проекция ускорения силы сопротивления движению.

Компоненты силы инерции J , обозначаемые через J_x , J_y и J_z , определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \delta m \frac{dv_x}{dt}; \\ J_y &= \delta m \frac{dv_y}{dt}; \\ J_z &= \delta m \frac{dv_z}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

в которых фигурируют производные соответствующих составляющих скорости (v_x , v_y и v_z) по времени t , выражающие компоненты ускорения.

Применяя начало д'Аламбера, составим уравнения равновесия действующих сил по координатным направлениям. Для оси x запишем

$$J_x = F_x + P_1 - P_2 - T_x. \quad (1.35)$$

Подставляя в эту формулу значения всех величин, получим равенство

$$\begin{aligned} \delta m \frac{dv_x}{dt} &= \delta m X + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \\ &- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - gf_x \delta m, \end{aligned}$$

преобразуя которое, находим

$$\delta m \frac{dv_x}{dt} = \delta m X - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - gf_x \delta m. \quad (1.36)$$

Учитывая выражение для δm [формула (1.29)] и сокращая уравнение (1.36) на эту величину, получаем окончательную запись уравнения движения в проекции на ось x . Аналогичные рассуждения позволяют получить уравнения и для двух других

координатных направлений. Вся система этих трех уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - g f_x; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} - g f_y; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} - g f_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Полные производные составляющих скоростей по времени определяются при этом равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Поясним вид этих равенств. На самом деле, если по правилу дифференцирования сложной функции нескольких переменных написать, например, выражение полной производной функции $v_x(x, y, z, t)$ по t , которое имеет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (1.39)$$

то приходим непосредственно к формуле, записанной в первой строке системы (1.38), учитывая, что

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z. \quad (1.40)$$

Приведенная выше система дифференциальных уравнений движения реальной жидкости (1.37), учитывающая лишь формально силы внутреннего трения (сопротивления) посредством величин $g f_x$, $g f_y$ и $g f_z$, выражающих проекции ускорения этих сил, записана в таком виде В. М. Маккавеевым в 1940 г. Ниже, в главе о турбулентном движении, будет раскрыто содержание указанных величин.

Если вместо реальной жидкости, движение которой характеризуется наличием внутреннего трения, рассмотреть идеальную жидкость, лишенную внутреннего трения, и составить уравнение

равновесия сил, применив те же рассуждения, то приходим к уравнениям Эйлера, выведенным им в 1755 г.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Полные производные составляющих скоростей по времени определяются равенствами (1.38).

§ 6. Ламинарное и турбулентное движение жидкости

В зависимости от величины скорости, молекулярной вязкости и размеров потока течение в нем принимает характер ламинарного или турбулентного движения.

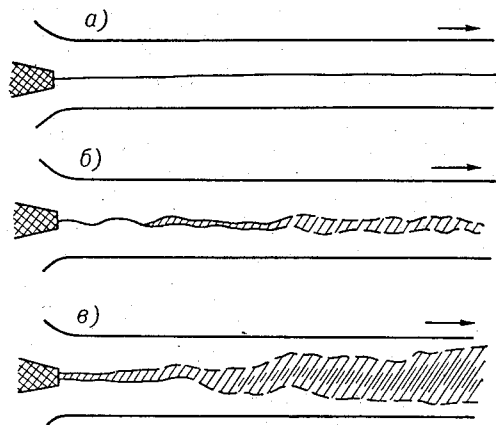


Рис. 1.4. Поведение подкрашенной струи.
а — в ламинарном потоке, б — при переходном режиме и в — в турбулентном потоке.

При ламинарном режиме скорости в каждой точке потока не изменяются во времени ни по величине, ни по направлению. При этом режиме изменение скорости течения может быть связано только с изменением расхода воды в потоке. Ламинарные потоки характеризуются крайне медленным перемешиванием, которое обусловлено только молекулярной диффузией. Если в ламинарный поток выпускать струю раствора краски из тонкой трубки со скоростью, равной скорости потока, то эта струя на большом отрезке пути не будет перемешиваться с водами потока, сохраняя четко выраженные границы (рис. 1.4 а).

В открытых потоках и в трубах скорости изменяются в плоскости поперечных сечений. Наиболее заметное изменение (уменьшение) в открытых потоках наблюдается вдоль вертикалей от поверхности ко дну. В трубах скорости уменьшаются вдоль радиусов от центра сечения к стенке. Вопрос о характере распределения скоростей в потоках будет рассмотрен в специальном разделе настоящего курса. Здесь же пока отмечается качественное различие распределения скоростей в ламинарном и турбулентном потоках. В отличие от турбулентного потока, характеризующегося очень резким изменением скорости вблизи стенок и относительно выровненной эпюрой в остальной части

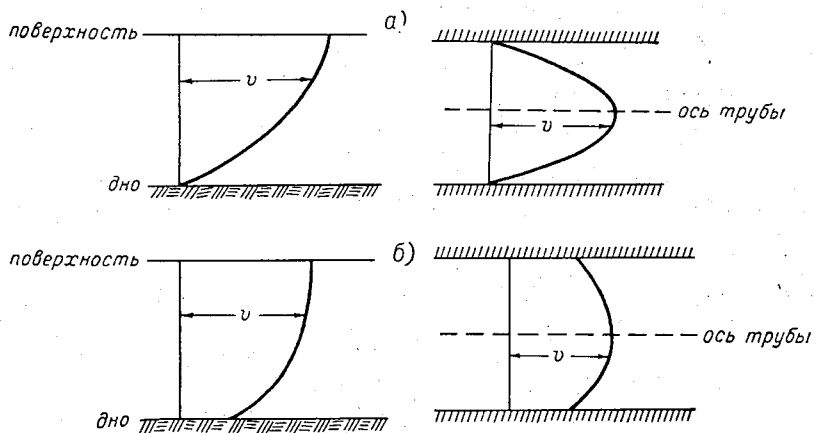


Рис. 1.5. Распределение скоростей по вертикали (слева) в открытом потоке и (справа) в закрытом потоке при ламинарном (а) и турбулентном (б) режимах.

сечения, в ламинарном потоке зона значительного возрастания скорости распространяется от стенок почти до поверхности потока (или до середины потока, если рассматривается течение в трубе). На рис. 1.5 а изображены эпюры скорости в открытом потоке и в трубе при ламинарном режиме течения.

Сопротивление движению в ламинарном потоке пропорционально скорости в первой степени, т. е.

$$\text{Сопротивл. лам.} = k_{\text{л}}v, \quad (1.42)$$

где $k_{\text{л}}$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от физической вязкости жидкости.

Главной особенностью турбулентного движения является наблюдающееся в каждой точке потока изменение скорости по величине и по направлению. Это явление называется пульсацией скорости. Одновременно с пульсацией скорости наблюдается и пульсация давления. С пульсацией скоростей взаимно связан и

процесс турбулентного перемешивания (турбулентной диффузии), являющийся гораздо более интенсивным (иногда в десятки тысяч раз и более), чем молекулярная диффузия, характерная для ламинарных потоков. Это подтверждается опытами с подкрашенной струей. На рис. 1.4 а показано поведение подкрашенной струи жидкости в турбулентном потоке: происходит колебание и интенсивное разбавление (перемешивание) струи, особенно на ее границах. На рис. 1.4 б показано поведение подкрашенной струи при переходном режиме (от ламинарного к турбулентному).

На рис. 1.5 б изображены характерные для турбулентного режима эпюры скорости в открытом и закрытом (в круглой трубе) потоках.

Сопротивление турбулентного потока пропорционально квадрату скорости течения, т. е.

$$\text{Сопротивл. турб.} = k_t v^2, \quad (1.43)$$

где k_t — коэффициент пропорциональности, в общем случае являющийся величиной переменной и зависящей от целого ряда факторов.

При недостаточно развитой турбулентности показатель степени может быть меньше двух. Однако этот случай не является характерным для естественных потоков.

Условия перехода от ламинарного режима к турбулентному и от турбулентного к ламинарному исследовал О. Рейнольдс, который ставил опыты с подкрашенной струей, изучая ее поведение в потоке. Рейнольдс нашел, что режим течения зависит от средней скорости потока $v_{\text{ср}}$, гидравлического радиуса R и кинематического коэффициента вязкости воды ν . Гидравлическим радиусом потока называется отношение площади поперечного сечения потока ω к смоченному периметру χ , т. е.

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (1.44)$$

Смоченный периметр — это линия контакта потока со стенками или с руслом. Для речных потоков, отличающихся относительно малой глубиной и большой шириной B , гидравлический радиус близок к средней глубине потока. Действительно, в этом случае $\chi \cong B$, а средняя глубина $H_{\text{ср}}$ определяется отношением

$$H_{\text{ср}} = \frac{\omega}{B}. \quad (1.45)$$

Рейнольдс составил из указанных выше трех величин ($v_{\text{ср}}$, R и ν) безразмерное характеристическое число, называемое числом Рейнольдса (обозначается Re),

$$Re = \frac{v_{\text{ср}} R}{\nu}. \quad (1.46)$$

В выражение числа Re для труб иногда вместо гидравлического радиуса ставят диаметр трубы d (заметим, что R трубы равен $d/4$), т. е. Re записывается в виде

$$Re = \frac{v_{cp} d}{\nu} \quad (1.47)$$

Подставляя размерности величин, входящих в формулу (1.46), легко получаем подтверждение того, что число Re действительно является безразмерным. В числителе $|v_{cp}| |R| = m^2/сек$; в знаменателе — $|\nu| = m^2/сек$. Частное от деления этих величин дает безразмерную величину.

Рейнольдс экспериментально установил, что переход от ламинарного режима к турбулентному и обратно происходит при определенных значениях числа Re , которые называют критическими. Позднее были уточнены значения критических чисел Рейнольдса (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Критические значения числа Рейнольдса

Поток	Определяющий линейный размер	Нижнее критическое значение Re	Верхнее критическое значение Re
В круглой трубе	R	500	750÷1000
То же	d	2000	3000÷4000
В открытом канале	R	~300	~1200

Ламинарный режим всегда имеет место, если число Re для потока получается меньше нижнего критического значения Re , т. е.

$$Re < Re_{\text{крит. нижн}}$$

турбулентный режим имеет место, если

$$Re > Re_{\text{крит. верхн}}$$

при Re , заключенном в пределах

$$Re_{\text{крит. нижн}} < Re < Re_{\text{крит. верхн}}$$

режим может быть и турбулентным, и ламинарным. Это отчасти зависит от степени шероховатости русла или стенок трубы: при большей шероховатости турбулентность развивается при меньших значениях Re . С другой стороны, важно также и направление изменений характеристики потока: если поток первоначально имел ламинарный режим, то при возрастании скорости течения переход к турбулентному режиму осуществляется при $Re_{\text{крит. верхн}}$, если скорость турбулентного потока убывает, то переход к ламинарному режиму осуществляется, когда число Re

станет ниже $Re_{\text{крит. нижн.}}$. В промежуточной области между двумя критическими значениями Re режим течения неустойчив. В этой области может также наблюдаться и переходный режим, характеризующийся не вполне развитой турбулентностью. Следует отметить, что в лабораторных условиях экспериментаторам удавалось получать ламинарный режим при числах Рейнольдса, выражающихся десятками тысяч, однако режим течения в этих случаях был неустойчивым. Очевидно, что в природных условиях возникновение ламинарного течения при числах Рейнольдса, превышающих $Re_{\text{крит. верхн.}}$, невозможно ввиду значительной шероховатости и непрямолинейности русла, воздействия ветра на водную поверхность и т. д. Подробному исследованию турбулентного режима посвящены специальные главы настоящего курса.

§ 7. Спокойные и бурные потоки

По характеру течения потоки могут быть разделены на спокойные и бурные, последние иногда называют стремительными.

Спокойные потоки характеризуются плавной формой водной поверхности. Препятствия обтекаются ими спокойно, образуя перед препятствием зона подъема уровня плавно сопрягается с водной поверхностью выше расположенного участка потока. На рис. 1,6 а представлена схема обтекания препятствия спокойным потоком. Равнинные реки, как правило, имеют спокойный режим течения.

Свободная поверхность бурных потоков отличается крайней неровностью, резкие повышения поверхности воды, имеющие нередко пенные гребешки, чередуются с понижениями и водопадами. Резкие повышения (взбросы воды) именуется гидравлическими прыжками; они образуются в стремительных потоках перед препятствиями или над ними, если последние погружены в воду (рис. 1,6 б). Гидравлические прыжки формируются и в местах уменьшения уклона дна, где имеет место переход от стремительного режима к спокойному. Спокойный режим устанавливается при уменьшении уклона непосредственно ниже гидравлического прыжка. Ниже препятствий и на участках резкого увеличения уклона образуются водопады.

Гидравлический прыжок является остановившейся волной. Скорость распространения одиночной волны c на поверхности жидкости определяется формулой

$$c = \sqrt{gH}, \quad (1.48)$$

где g — ускорение силы тяжести, H — глубина воды.

С выводом этой формулы мы познакомимся ниже, в главе, посвященной неустановившемуся движению.

Если средняя скорость течения $v_{\text{ср}}$ потока оказывается равной c или превышает ее, то образующаяся у препятствия волна не может распространиться вверх по течению и останавливается в месте ее возбуждения, т. е. формируется гидравлический прыжок. Поэтому условием существования бурного (стремительного) режима является

$$v_{\text{ср}} \geq c. \quad (1.49)$$

Из предельного равенства

$$v_{\text{ср}} = c \quad (1.50)$$

можно получить критерий, определяющий переход к бурному режиму. Для этого достаточно подставить в равенство (1.50)

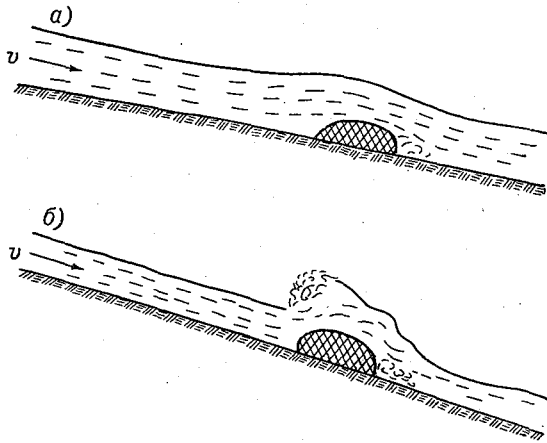


Рис. 1.6. Обтекание валуна спокойным (а) и бурным (б) потоками.

значение c , вычисленное по формуле (1.48). В результате находим

$$\frac{v_{\text{ср}}^2}{gH} = 1. \quad (1.51)$$

Безразмерная величина, стоящая в левой части этого равенства, имеет большое значение в гидравлике; она именуется числом (или критерием) Фруда (Fr), по имени впервые получившего его ученого.

$$Fr = \frac{v_{\text{ср}}^2}{gH}. \quad (1.52)$$

Проверим, действительно ли число Fr является безразмерным. Размерность числителя $|v_{\text{ср}}^2| = \text{м}^2/\text{сек}^2$ знаменателя — $|g| |H| = \text{м}^2/\text{сек}^2$. Отношение этих величин дает безразмерную величину.

Критическое значение числа Фруда определяется равенством (1.51), в соответствии с которым можно следующим образом написать условия существования спокойного и бурного режимов течения:

$$\left. \begin{aligned} Fr < 1 & - \text{спокойный режим;} \\ Fr > 1 & - \text{бурный режим.} \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Начинающие изучать гидравлику иногда допускают ошибку, отождествляя бурный режим с турбулентным. Признаки этих двух характеристик течения качественно различны. Спокойные потоки могут быть как ламинарными, так и турбулентными. Можно встретить и ламинарный поток, формально характеризующийся бурным режимом, правда, такой поток должен отличаться крайне малой глубиной. Это может быть, например, слой воды, стекающий по сильно наклоненному или вертикально поставленному стеклу, и т. д.

Бурный режим является наиболее характерным для горных рек. Конечно, надо иметь в виду, что и в горах могут встретиться реки или участки рек со спокойным режимом. Обычно же поверхность горных рек представляет собой систему остановившихся волн (гидравлических прыжков).

§ 8. Гидравлическая классификация движения воды в русловых потоках

Осредняя в различных точках турбулентного потока пульсирующие скорости по относительно коротким, но достаточным для такого осреднения интервалам времени, мы получаем поле осредненных скоростей. В целях дальнейшей схематизации эти скорости могут быть осреднены в пространстве, например, по поперечным сечениям потока. Изменение во времени и по длине потоков полученных таким образом скоростей изучается в ряде разделов гидравлики.

В естественных и искусственных водотоках осредненное течение может отличаться изменчивостью как во времени, так и по длине потока. Эта изменчивость накладывает отпечаток на структуру течений, характер формирующейся свободной поверхности и требует учета при изучении действующих на поток сил. Поэтому оказывается необходимым учитывать инерцию водных масс, обусловленную изменением скорости; в общем случае она учитывается уже знакомыми нам членами уравнения движения: dv_x/dt , dv_y/dt и dv_z/dt .

Обратим внимание на структуру формулы полной производной компоненты скорости по времени (запишем только проекцию на ось x)

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (1.54)$$

В случае если поток является прямолинейным и ось x направлена вдоль течения, поперечные компоненты скорости (v_y и v_z) отсутствуют и выражение (1.54) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.55)$$

Индекс « x » при v опущен, так как v выражает здесь уже не составляющую скорости, а величину ее вектора. Так как в рассматриваемом случае

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (1.56)$$

то очевидно, что выражение (1.55) полностью учитывает ускорение водных масс и позволяет вычислить инерцию.

Инерционный член уравнения движения, рассмотренный выше, относится к элементарной струйке жидкости. Ускорение водных масс всего потока в целом учитывается приближенно выражением, аналогичным выражению (1.55), но отличающимся тем, что оно содержит величину средней по сечению скорости потока v_{cp} , т. е.

$$\frac{dv_{cp}}{dt} = \frac{\partial v_{cp}}{\partial t} + v_{cp} \frac{\partial v_{cp}}{\partial x}. \quad (1.57)$$

Включение в уравнение движения инерционного члена даже в таком упрощенном виде, как представлено формулой (1.57), приводит к серьезным, в ряде случаев пока непреодолимым затруднениям в решении конкретных гидравлических задач. Поэтому представляется целесообразным разделить возможные случаи движения жидкости по характеру ускорения и построить решения применительно к этим случаям. Именно так и поступают в гидравлике. Это позволяет в каждой конкретной задаче принять в отношении ускорения вполне определенное предположение, учитывающее главные черты движения, и получить наиболее рациональное решение.

В гидравлике выделяются следующие виды движения жидкости: 1) установившееся равномерное движение, называемое просто равномерным ($\frac{dv_{cp}}{dt} = 0$), 2) установившееся неравномерное, обычно называемое неравномерным ($\frac{\partial v_{cp}}{\partial t} = 0$,

$\frac{\partial v_{cp}}{\partial x} \neq 0$), 3) неустановившееся движение ($\frac{\partial v_{cp}}{\partial t} \neq 0$). Последний вид движения является наиболее сложным.

Изучению перечисленных видов движения посвящены специальные разделы гидравлики.

Рассмотрим более детально каждый из этих видов движения. Если при постоянстве течения во времени сохраняется неизменность вдоль потока уклона водной поверхности, глубины и скорости течения, сохраняется параллельность между дном и свободной поверхностью, то течение будет равномерным. Для бесприточного участка потока с неизменным во времени расходом воды достаточным условием равномерности течения является неизменность площади и формы поперечного сечения потока по его длине. Последнее обуславливает и постоянство скорости вдоль потока. Заметим, что искривление оси потока (например,

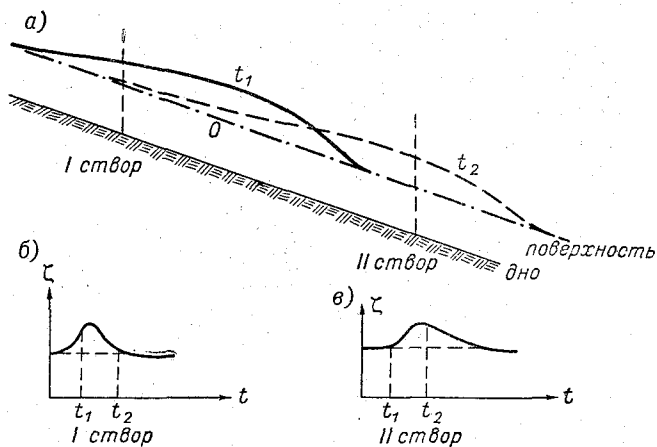


Рис. 1.7. Свободная поверхность потока при неустановившемся движении.

a — положение волны паводка в моменты времени t_1 и t_2 на продольном профиле потока (0 — уровень, отвечающий установившемуся режиму, предшествовавшему наступлению паводка), *б* — прохождения паводка через створ I, *в* — то же через створ II.

в меандрирующих реках) приводит к перераспределению скоростей в поперечных сечениях при переходе от створа к створу, что создает нарушение равномерности течения для отдельных (береговых, стрежневых) струй потока. В этом случае, несмотря на неизменность средней скорости вдоль потока, течение в строгом смысле не является равномерным. Тем не менее в ряде задач гидравлики указанной неравномерностью пренебрегают, относя течение к категории равномерного движения.

Неравномерным движением называют такое движение, при котором гидравлические элементы потока (скорость, глубина, площадь поперечного сечения, уклон водной поверхности) изменяются вдоль продольной оси потока. Если при этом скорость и уклон уменьшаются, а глубина и площадь поперечного сечения увеличиваются, течение будет замедленным; уклон свободной поверхности такого потока меньше уклона дна. Течение назы-

ваются ускоренным, если скорость и уклон вдоль потока возрастают, а глубина и площадь сечения уменьшаются. Неравномерное движение разделяется на **медленно** и **быстро** (внезапно) **изменяющееся**. К первому виду движения относятся случаи с плавным изменением вдоль потока указанных выше величин, ко второму, внезапно изменяющемуся движению, относятся гидравлический прыжок, гидравлический водопад и разные случаи изменения поперечного сечения потока в искусственных трубопроводах и каналах.

Перейдем теперь к рассмотрению неустановившегося движения. При неустановившемся движении воды в открытом потоке (так называются потоки, поверхность которых имеет непосредственный контакт с атмосферой) его расход, площадь поперечного сечения, скорость, глубина и уклон в каждом фиксированном створе изменяются во времени, а для любого заданного момента времени эти величины оказываются переменными вдоль потока. На рис. 1.7 *а* дано положение водной поверхности потока при неустановившемся режиме движения в моменты времени t_1 и t_2 . Эти же моменты времени показаны на графиках уровней (рис. 1.7 *б* и *в*), построенных для створов I и II. На этих створах прослеживается перемещение волны повышения уровня (волны паводка). Графики t_1 и t_2 можно назвать мгновенными продольными профилями волны паводка.

Неустановившееся движение в закрытых напорных потоках (в трубах) для каждого поперечного сечения характеризуется изменением расходов и скорости течения во времени. В длинных трубах постоянного сечения при неустановившемся режиме наблюдается иногда заметное изменение скорости и расхода также и по длине потока, что обусловлено сжимаемостью жидкости и деформацией труб.

§ 9. Общая характеристика речных потоков

Течение рек не остается неизменным во времени. Формирование речного потока происходит в определенной физико-географической обстановке, и режим рек реагирует на все метеорологические и гидрологические процессы, происходящие в пределах речного бассейна.

Весьма характерной является связь между процессами, происходящими в пределах речных бассейнов, и режимом расходов и уровней равнинных рек территории нашей страны. Весеннее таяние снега приводит к увеличению расходов рек. Появляется множество временных водотоков, которые несут свои воды в реки. Расходы талых вод могут быть пропущены речным руслом только при более высоких, чем обычно, уровнях. Происходит подъем уровня, начинается паводок (или половодье). Уровень поднимается до некоторого максимума, а затем по прекращении

стока с бассейна начинает снижаться (рис. 1.8). Наивысший уровень принято называть пиком паводка (половодья). После половодья наступает период летней межени, характеризующийся относительно небольшими расходами. Наблюдающиеся в это время иногда значительные подъемы уровня связаны с выпадением дождей. Осенью в связи с увеличением осадков и уменьшением испарения нередко наблюдается некоторое иногда значительное нарастание расходов. Зимой расходы и уровни, как правило, низкие.

Весенние паводки наших равнинных рек отличаются относительно медленным подъемом уровней и еще более медленным

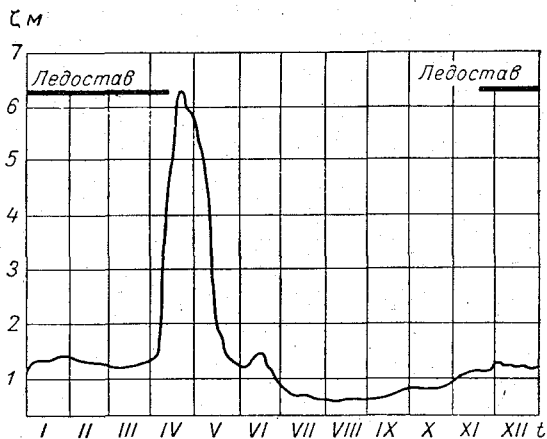


Рис. 1.8. График уровней равнинной реки (р. Клязьма у г. Владимира, 1932 г.).

спадом. Чем больше река, тем дольше, как правило, продолжается паводок. Нередко паводки имеют не один, а два и даже более пиков. Во время паводков пойма обычно затопляется, так как русло не в состоянии пропустить большие паводочные расходы.

Горные реки характеризуются частой сменой повышений и понижений расходов и уровней. Это обусловлено климатическими особенностями горных районов, в высокогорных зонах которых весьма часты дожди и ливни, а резкая смена температуры вызывает то интенсивное таяние снега и ледников, то накапливание твердых осадков.

На малых равнинных и горных реках в период таяния снега наблюдается суточный ход уровней, что связано с суточным ходом солнечной радиации и температуры воздуха.

Паводки могут быть вызваны не только изменением расходов, но и временными изменениями пропускной способности русла, например, за счет завалов русла или зимой при заторах или

зажорах; изменение уровней происходит также вследствие сильного зарастания русла водной растительностью и т. д.

Искусственное регулирование рек в целях их энергетического или транспортного освоения или водопользования оказывает существенное влияние на их режим. Создание на реках плотин с регулирующей емкостью в верхнем бьефе (т. е. с водохранилищем) изменяет режим расходов и уровней рек. Ниже плотины (в нижнем бьефе) создается весьма своеобразный режим расходов и уровней, связанный с режимом работы гидростанции и шлюзов. Нередко осуществляют искусственное регулирование режима нижнего бьефа, поддерживая путем периодических пусков необходимые для судоходства уровни воды. Характерной особенностью режима нижних бьефов гидростанций с суточным регулированием является наличие хорошо выраженных суточных паводков.

Как правило, на большинстве рек нарастание уровней и расходов во время паводков происходит относительно медленно. Это позволяет в ряде случаев применить к речным потокам уравнение установившегося движения. Разумеется, специальное изучение речных паводков может быть выполнено только при использовании аппарата, относящегося к случаю неустановившегося движения.

Особенностью речных потоков является также неравномерность течения. При движении вдоль реки можно наблюдать чередование сравнительно широких и узких участков русла, глубоких и мелких. Изменяются вместе с этим и площади поперечного сечения потока. Участки с замедленным течением сменяются участками с ускоренным течением. Хорошо выраженные глубоководные участки русла называются плёсами, а мелководные — перекатами. В период межени на перекатах уклоны водной поверхности и скорости течения больше, чем на плёсах. Глубины на перекатах иногда весьма малы. Поэтому перекаты на судоходных реках часто создают серьезные затруднения судоходству и требуют затраты значительных усилий на дноуглубление или другие меры по обеспечению достаточных глубин. Нередко течение реки разделяется островами на рукава-протоки, что также ведет к неравномерности течения. Фактором неравномерности течения речного потока является сложность конфигурации речного русла как в отношении плановых очертаний, так и в отношении формы продольного профиля.

Итак, характерным для речного потока является чередование участков с ускоренным течением и участков, имеющих замедленное течение. В среднем на достаточно больших участках речных потоков не наблюдается тенденция к уменьшению или увеличению скорости по длине реки. Именно поэтому, рассматривая течение, осредненное по длине достаточно больших участков реки (охватывающих плёс и перекат или несколько плёсов и пере-

катов), его относят к категории равномерного. Как видим, под равномерным движением речного потока подразумевается особая категория движения, являющаяся равномерным в среднем для достаточно больших участков рек.

Одностороннее изменение, например уменьшение скорости течения реки, наблюдается в условиях подпора от плотины или притока, впадающего ниже по течению (в период паводка на последнем). Ускоренное движение, сопутствующее формированием кривой спада, может наблюдаться, например, на притоке, впадающем в нижний бьеф, во время паводка, если река сильно зарегулирована и значительная часть паводочного стока удерживается в верхнем бьефе. Эти случаи движения речного потока должны рассматриваться как неравномерное движение с использованием соответствующих методов гидравлики. В равной мере те же методы должны использоваться и при изучении коротких участков речного потока, когда оказывается необходимым учитывать переход от плёса к перекату или от переката к плёсу.

§ 10. О внутренней структуре речных потоков

Почти все естественные открытые потоки имеют турбулентный режим течения. Исключения представляют мельчайшие первичные ручейки, формирующиеся на склонах бассейна во время снеготаяния или выпадения жидких осадков. Течение в таких ручейках может иметь переходный или даже ламинарный режим. Для всех речных потоков характерен турбулентный режим.

Выше, при рассмотрении особенностей турбулентного движения, было отмечено, что главной чертой турбулентного движения является пульсация скоростей по величине и направлению. Пульсация скоростей обусловлена тем, что внутри турбулентного потока в различных направлениях перемещаются жидкие объемы разных размеров, имеющие более или менее выраженные индивидуальные особенности, такие, как, например, величина относительной скорости перемещения в потоке, направление относительного перемещения, угловая скорость вращательного движения, средний размер и др.

Эти объемы называют иногда структурными элементами турбулентного потока, или пульсационными индивидуумами. Турбулентный поток целиком состоит из таких структурных элементов. Пространства между крупными элементами заполнены более мелкими. Если внутри потока зафиксировать какую-либо неподвижную точку, то через эту точку будут проходить с различными относительными скоростями и по разным траекториям структурные элементы. При помещении прибора для измерения скорости в указанную точку мы будем получать хронограмму мгновенных скоростей, отрезки которой будут показывать значения скорости перемещения структурных элементов. Чередование структурных

элементов, проходящих через точку измерения, обнаруживается на хронограмме скорости резкими увеличениями и уменьшениями мгновенной скорости, т. е. их пульсациями.

Поскольку гидрологам приходится заниматься измерениями скоростей, надо всегда отдавать себе отчет в том, какая скорость должна измеряться — мгновенная или осредненная, и в зависимости от этого применять соответствующую методику и приборы. Чаще всего приходится измерять осредненную во времени скорость. Продольная составляющая этой скорости определяет расход реки. При достаточно длительном выдерживании прибора в точке через нее успеет пройти значительное число различных структурных (пульсационных) индивидуумов потока, что дает возможность получить осредненную скорость в точке и найти ее продольную и поперечные компоненты.

Пульсационные индивидуумы в общем случае обладают не только различной скоростью, но и различным содержанием взвешенных и растворенных веществ, различной температурой. Поэтому в турбулентном потоке, как правило, наблюдается пульсация мутности, температуры и концентрации солей. Чем неравномернее то или иное вещество или температура распределены в потоке, тем больше будет их пульсация.

Пульсация концентрации будет отсутствовать в турбулентном потоке только в случае равномерного распределения в нем соответственно взвешенных или растворенных веществ. При изотермии будет отсутствовать пульсация температуры.

Турбулентное перемешивание всегда направлено на выравнивание температуры, мутности, скорости и т. д. Но не всегда такое выравнивание может быть достигнуто. Во многих случаях неоднородность поля той или иной величины поддерживается внешней (по отношению к процессу перемешивания) причиной. Так, например, неоднородность поля мутности поддерживается тем, что под влиянием силы тяжести тяжелые частицы взвеси опускаются в придонный слой потока, который, кроме того, дополнительно обогащается наносами за счет их смыва с поверхности русла. Неоднородность поля скорости поддерживается трением дна, неоднородность температурного поля — нагреванием или охлаждением воды с поверхности и т. д.

Остановимся кратко на вопросе о распределении по вертикали и по ширине речного потока осредненной скорости (т. е. скорости, получаемой при достаточно длительном выдерживании прибора в точке, что позволяет исключить турбулентную пульсацию).

Скорости течения меняются по вертикали примерно так, как показано на рис. 1.9. Наибольшая скорость расположена у поверхности, наименьшая — у дна; последняя обычно не принимает нулевого значения. Средняя скорость по вертикали, как правило, близка к скорости на глубине 0,6 от полной глубины вертикали.

Ветер и лед меняют характер распределения скорости по вертикали речного потока, это изменение поясняется рис. 1.10.

При вычислении расхода воды производят осреднение скорости течения по вертикали. Чтобы получить элементарный расход q , умножают среднюю скорость $v_{ср}$ на глубину вертикали H . Значения q для отдельных вертикалей используются при вычислении расхода воды по потоку.

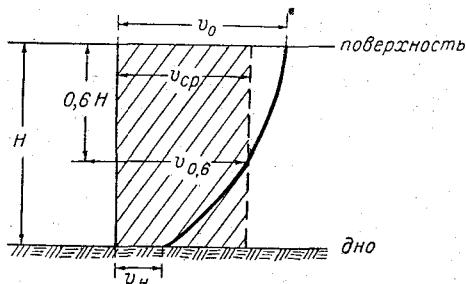


Рис. 1.9. Характерная эпюра распределения скорости по вертикали речного потока.

Средняя скорость $v_{ср}$ по ширине реки меняется довольно плавно. Она оказывается тем больше, чем больше глубина и чем больше местный (на данной вертикали) продольный уклон I . При постоянстве I по ширине реки распределение $v_{ср}$ связано только с распределением глубин. Заметим, что скорость течения на урезе, как правило, не равна нулю.

Одной из особенностей движения воды в реках является непараллелоструйность течений, которая наблюдается как на прямых участках рек, так и на закруглениях, где проявляется особенно резко. Сущностью непараллелоструйного течения является

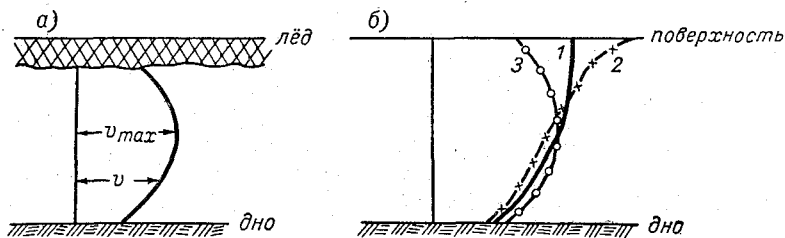


Рис. 1.10. Влияние льда (а) и ветра (б) на распределение скоростей по вертикали.

1 — эпюра при отсутствии ветра, 2 — при ветре, направленном по течению, 3 — при ветре, направленном против течения.

различие в направлении скоростей в различных точках вертикали. Начерченные на плане участка реки векторы скоростей, измеренных на различных расстояниях от поверхности, располагаются веерообразно. Каждый из этих векторов можно разложить на продольную и поперечную составляющие скорости (в плоскости поперечного сечения, нормального осредненному направлению течения).

Поперечные компоненты скоростей называют поперечными скоростями, а образуемые ими течения — поперечными тече-

ниями. Из условия неразрывности движения жидкости вытекает обязательное условие замкнутости поперечных течений при установившемся движении жидкости. Именно поэтому поперечные течения нередко называют поперечными циркуляциями. В поперечном сечении потока наблюдается от одного до нескольких замкнутых циркуляционных течений. В наиболее распространенном случае одно из циркуляционных течений занимает основную часть площади поперечного сечения, а другие циркуляции имеют второстепенное значение. В месте сопряжения циркуляционных течений их скорости совпадают по величине и по направлению. В соответствии с этим два соседних циркуляционных течения должны иметь обязательно различные направления вращения (различные знаки). На свободной поверхности потока можно проследить располагающуюся вдоль потока линию (полосу) встречи двух циркуляционных течений. Такое течение называют сбойным. При наличии на поверхности сбойного течения у дна формируется расходящееся течение. В других случаях наблюдается расходящееся поверхностное и сходящееся донное течение.

Наиболее частым случаем поперечных течений являются течения, возникающие на закруглении речного потока, и более слабые течения, формирующиеся под влиянием ускорения Кориолиса (обусловленного вращением Земли).

Глава II

ГИДРОСТАТИКА

§ 1. Гидростатическое давление и его свойства

В главе I указывалось, что давление жидкости является нормальной силой, т. е. силой, действующей по нормали к поверхности. Давление в покоящейся жидкости называется гидростатическим.

Гидростатическое давление (напряжение) p определяется пределом

$$p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{P}{\omega} \right) = \frac{dP}{d\omega}, \quad (2.1)$$

где P — сила давления, действующая на некоторую площадку ω , выделенную в покоящейся жидкости.

Рассмотрим основные свойства гидростатического давления. Первое свойство заключается в том, что гидростатическое давление на любую произвольно выделенную в неподвижной жидкости площадку действует в направлении внутренней нормали (рис. 2.1). Это положение очевидно из следующих соображений.

Если бы сила давления p в покоящейся жидкости была направлена не по нормали к площадке действия, то ее можно было бы разложить на две составляющие, одна из которых p_n направлена по нормали, другая p_t по касательной к площадке действия. Поскольку жидкость находится в покое, то касательное напряжение существовать не может, поэтому $p_t=0$. Предположение о том, что сила p_n может быть направлена по внешней нормали, также неверно, так как это привело бы к разрыву жидкости.

Следовательно, в покоящейся жидкости действует сила давления $p=p_n$, направленная по внутренней нормали к площадке

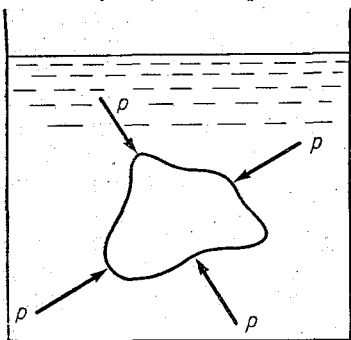


Рис. 2.1. Давление жидкости на криволинейные поверхности.

действия. Эта сила не вызывает нарушения равновесия жидкости, так как при действии на выделенную внутри жидкости площадку уравнивается силой, действующей по внешней нормали с противоположной стороны площадки.

Второе свойство гидростатического давления состоит в том, что величина давления не зависит от ориентировки (угла наклона) той площадки, на которую оно действует. Для пояснения рассмотрим условия равновесия призмы, мысленно выделенной в неподвижной жидкости (рис. 2.2).

Пусть ширина призмы равна единице, остальные стороны обозначим через a , b и c , величины которых оказываются при этом численно равными площадям соответствующих граней призмы, а объем призмы будет равен $W = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot 1$.

На призму действует объемная сила — сила тяжести G , выражаемая формулой

$$G = \gamma W = \frac{\gamma}{2} ab, \quad (2.2)$$

где γ — удельный вес жидкости.

Запишем условия равновесия сил, действующих на выделенный объем жидкости в направлении координатных осей x , y и z .

По оси x

$$p_a a - p_c c \cos \alpha = 0; \quad (2.3)$$

по оси y

$$-p_c c \cos \beta - G + p_b b = 0, \quad (2.4)$$

или

$$p_c c \cos \beta + \frac{\gamma}{2} ab - p_b b = 0. \quad (2.5)$$

По оси z давление на грани, обращенные к нам и от нас, взаимно уравновешивается, поскольку силы давления равны и направлены во взаимно противоположные стороны.

Замечая, что

$$c \cos \alpha = a;$$

$$c \cos \beta = b,$$

преобразуем уравнения (2.3) и (2.5), разделив первое из них на a , а второе на b . После соответствующих преобразований получим следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} p_a - p_c &= 0; \\ p_c - \frac{\gamma}{2} a - p_b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

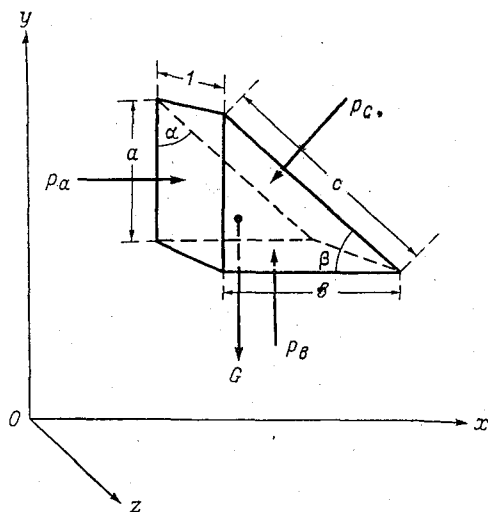


Рис. 2.2. Давление жидкости на грани призмы.

Будем уменьшать призму до бесконечно малого размера таким образом, чтобы ее форма в плоскости xy не менялась, а размер в направлении оси z оставался равным единице. При таком уменьшении призмы соотношение действующих сил не изменится. Для бесконечно малой призмы со стороной $a \rightarrow 0$ уравнения (2.6) окончательно могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} p_a &= p_c; \\ p_c &= p_b. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Здесь p_a , p_b и p_c — давления в точке, имеющие разное направление действия.

Таким образом, мы доказали, что гидростатическое давление в точке в различных направлениях одинаково и не зависит от ориентировки площадки действия давления.

§ 2. Уравнения равновесия покоящейся жидкости. Распределение давления в жидкости

В § 5 главы I были получены дифференциальные уравнения движения жидкости (1.37). В случае покоящейся жидкости скорость и компоненты ускорения равны нулю:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (2.8)$$

Ввиду отсутствия движения также равны нулю и силы сопротивления, т. е.

$$gf_x = gf_y = gf_z = 0. \quad (2.9)$$

Подставляя равенства (2.8) и (2.9) в систему уравнений (1.37), получим общие дифференциальные уравнения равновесия покоящейся жидкости:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где X , Y , Z — проекции ускорения массовой силы на соответствующие координатные оси. В случае неподвижной жидкости единственной массовой силой является сила тяжести, действующая всегда по нормали вниз. Располагая систему координат таким образом, чтобы ось y была направлена вертикально вверх, а оси x и z горизонтально, можем написать

$$\left. \begin{aligned} X &= 0; \\ Y &= -g; \\ Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

здесь $-g$ — ускорение силы тяжести, направленное по вертикали вниз.

Подстановка полученных значений проекций ускорения силы тяжести в дифференциальные уравнения равновесия покоящейся жидкости (2.10) приводит к следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} &= -g; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ввиду независимости давления от координат x и z , о чем свидетельствуют равенства $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, заключаем, что полная и частная производные от функции $p(y)$ (при независимости ее от времени) совпадают, и поэтому можно записать:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dp}{dy} = -\gamma,$$

откуда

$$dp = -\gamma dy. \quad (2.12)$$

Интегрирование уравнения (2.12) для однородной жидкости, характеризующейся постоянством плотности по всем координатным направлениям, а следовательно, и постоянством удельного веса жидкости γ , дает

$$p = -\gamma y + C_1. \quad (2.13)$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная интегрирования, которую определим из условий на поверхности жидкости, где давление равно внешнему давлению p_0 , т. е. $p = p_0$. Если поверхность жидкости непосредственно соприкасается с атмосферой, то внешнее давление на поверхности жидкости равно атмосферному давлению на этом уровне. Поверхность жидкости, имеющей контакт с атмосферой, называют свободной поверхностью. Приняв за начало отсчета по оси y уровень поверхности жидкости, применим уравнение (2.13) к точке, расположенной на поверхности ($y=0$),

$$p_0 = -\gamma \cdot 0 + C_1.$$

Отсюда находим произвольную интегрирования $C_1 = p_0$. Уравнение (2.13) можно записать в виде

$$p = p_0 - \gamma y. \quad (2.14)$$

Введя вместо вертикальной координаты y глубину погружения точки, в которой определяется давление, т. е. принимая

$h = -y$, получим следующую запись уравнения распределения давления по вертикали:

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (2.15)$$

Как видно, полное гидростатическое давление p в некоторой точке складывается из давления на поверхности и добавочного гидростатического давления, выражающегося величиной γh , которая численно равна весу столба жидкости высотой h с основанием, равным единице.

Обозначив добавочное гидростатическое давление через p^* , можем записать

$$p^* = \gamma h = p - p_0.$$

Добавочное гидростатическое давление показывает, насколько полное давление на глубине h превышает давление на поверхности.

В открытых сосудах, водоемах, гидротехнических сооружениях, имеющих свободную поверхность, добавочное гидростатическое давление выражает разность между полным гидростатическим и атмосферным давлением и называется манометрическим давлением (обозначаем p_m)

$$p_m = p - p_{\text{ат.}}$$

Из уравнения (2.15) следует, что в покоящейся жидкости, имеющей постоянную плотность, давление меняется по вертикали, а вдоль горизонтальных поверхностей (это отмечалось и выше) оно остается неизменным. Таким образом, горизонтальные поверхности в покоящейся жидкости оказываются поверхностями равного давления, или так называемыми изобарическими поверхностями. Одной из таких поверхностей является свободная поверхность жидкости, где $p = \text{const} = p_{\text{ат.}}$

В однородной жидкости ускорение силы тяжести нормально изобарическим поверхностям, являющимся взаимно параллельными. Следует иметь в виду, что для больших водоемов, соизмеримых с размерами земного шара, нельзя игнорировать сферичность изобарических поверхностей, в том числе и свободной поверхности. Изобарические поверхности детально исследуются в океанологии и динамической метеорологии, где приходится сталкиваться с неоднородной по плотности жидкостью и где эти поверхности могут иметь весьма сложную форму.

§ 3. Основное уравнение гидростатики. Способы выражения давления

Уравнение гидростатики (2.13) можно представить следующим образом:

$$\frac{p}{\gamma} + y = \frac{C_1}{\gamma}.$$

Поскольку в жидкости с постоянной плотностью $\frac{C_1}{\gamma} = \text{const}$,
можно записать

$$\frac{p}{\gamma} + y = \text{const}. \quad (2.16)$$

Это уравнение или уравнение (2.15) называют основным уравнением гидростатики.

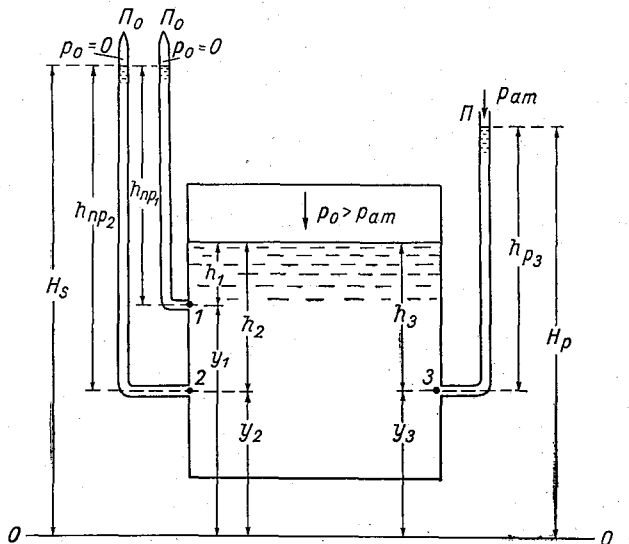


Рис. 2.3. Гидростатический H_s и пьезометрический H_p напоры, приведенная $h_{пр}$ и пьезометрическая h_p высоты.

Применив уравнение (2.16) к различным точкам однородной жидкости, наполняющей сосуд, изображенный на рис. 2.3, получим

$$\frac{p_1}{\gamma} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + y_2 = \text{const}. \quad (2.16')$$

Здесь p_1 и p_2 — полное гидростатическое давление в точках 1 и 2; y_1 и y_2 — вертикальные координаты этих точек относительно горизонтальной плоскости сравнения 0—0.

Величина $\frac{p}{\gamma}$, так же как и y , имеет размерность длины

$$\left| \frac{p}{\gamma} \right| = \frac{T^*/M^2}{T^*/M^3} = M$$

и носит название **приведенной высоты давления** $h_{пр}$.

Для того чтобы пояснить, чему равна приведенная высота $h_{\text{пр}}$, обратимся к рис. 2.3. Пусть на уровне точки y_1 к отверстию в стенке сосуда присоединена запаянная сверху тонкая изогнутая трубка Π_0 , из которой предварительно выкачан воздух. Тогда под влиянием гидростатического давления в сосуде жидкость в трубке поднимется на некоторую высоту $h_{\text{пр}1}$. Жидкость находится в равновесии, поэтому давление в точке 1 со стороны трубки должно уравновешивать полное гидростатическое давление p_1 со стороны сосуда, т. е. будет иметь место равенство

$$\gamma h_{\text{пр}1} = p_0 + \gamma h_1 = p_1. \quad (2.17)$$

Отсюда находим

$$h_{\text{пр}1} = \frac{p_1}{\gamma}.$$

Очевидно, что для точки 2 можно записать

$$h_{\text{пр}2} = \frac{p_2}{\gamma}.$$

Приведенная высота давления $h_{\text{пр}}$ — это такая высота столба жидкости в трубке (при условии наличия в ней полного разрежения воздуха), которая способна создать давление, равное полному гидростатическому давлению в рассматриваемой точке жидкости. Приведенная высота используется для выражения полного гидростатического давления в единицах длины.

Напишем уравнение (2.16'), подставив в него вместо $\frac{p}{\gamma}$ величину $h_{\text{пр}}$

$$h_{\text{пр}1} + y_1 = h_{\text{пр}2} + y_2 = \text{const}. \quad (2.18)$$

Сумма приведенной высоты давления в данной точке и вертикальной координаты этой точки над горизонтальной плоскостью сравнения называется **гидростатическим напором** H_S жидкости в данной точке. Величину H_S измеряют относительно выбранной заранее плоскости сравнения (рис. 2.3).

Из уравнения (2.18) следует, что $H_S = \text{const}$, т. е. во всех точках покоящейся однородной жидкости величина H_S одинакова.

Рассмотрим теперь условие равновесия жидкости в точке 3, на уровне которой y_3 к отверстию изображенного на рис. 2.3 сосуда присоединена изогнутая и открытая сверху трубка Π — пьезометр. Как и в предыдущем случае, давление в точке 3 со стороны жидкости в открытом пьезометре должно уравновешивать полное гидростатическое давление в этой точке со стороны жидкости в сосуде.

Следовательно,

$$p_{ат} + \gamma h_{p_3} = p_0 + \gamma h_3 = p_3. \quad (2.19)$$

Из формулы (2.19) находим

$$h_{p_3} = \frac{p_3 - p_{ат}}{\gamma} = \frac{p_m}{\gamma},$$

или

$$h_{p_3} = h_3 + \frac{p_0 - p_{ат}}{\gamma}. \quad (2.20)$$

Высота h_p называется **пьезометрической высотой**; через нее выражают добавочное (манометрическое) давление. Из равенства (2.20) видно, что в тех случаях, когда давление на поверхности жидкости равно атмосферному ($p_0 = p_{ат}$), пьезометрическая высота h_p равна глубине погружения рассматриваемой точки.

Очевидно, что для одной и той же точки пьезометрическая высота всегда меньше приведенной высоты давления на высоту столба жидкости, соответствующую величине атмосферного давления

$$h_{p_3} = \frac{p_3}{\gamma} - \frac{p_{ат}}{\gamma} = h_{пр_3} - \frac{p_{ат}}{\gamma}. \quad (2.21)$$

Пьезометрическим напором H_p в данной точке по отношению к горизонтальной плоскости сравнения 0—0 называется сумма вертикальной координаты этой точки над плоскостью сравнения и пьезометрической высоты h_p

$$H_p = h_p + y. \quad (2.22)$$

Имея в виду, что

$$h_p = h_{пр} - \frac{p_0}{\gamma},$$

записываем

$$H_p = h_{пр} - \frac{p_0}{\gamma} + y = H_S - \frac{p_0}{\gamma}. \quad (2.23)$$

Величины H_S и $\frac{p_0}{\gamma}$ являются постоянными, поэтому $H_p = \text{const}$, т. е. пьезометрический напор является также постоянным для всех точек покоящейся жидкости.

Теперь рассмотрим закон Паскаля. Предположим, что жидкости, находящейся в замкнутом сосуде, через поршень сообщено внешнее давление p_0 . Запишем полное гидростатическое давление для трех точек жидкости в сосуде, согласно уравнению (2.15),

$$p_1 = p_0 + \gamma h_1; \quad p_2 = p_0 + \gamma h_2; \quad p_3 = p_0 + \gamma h_3,$$

В этих выражениях переменной величиной, влияющей на величину давления в рассматриваемых точках, является глубина h ; величина же внешнего давления p_0 для всех точек одинакова. Следовательно, внешнее давление передается во все точки жидкости без изменений, другими словами, изменение внешнего давления в одной какой-либо точке покоящейся жидкости передается всему ее объему. В этом и заключается закон Паскаля.

Гидростатическое давление может быть выражено тремя способами:

а) в единицах силы на единицу площади, например в $кг/см^2$ или $т^*/м^2$, где $кг$ и $т^*$ приняты как единицы силы; б) в атмосферах, причем принимаемое за единицу атмосферное давление равно $1,033 кг/см^2 = 10,33 т^*/м^2$; давление, равное $1 кг/см^2$, называется технической атмосферой; в) высотой столба жидкости, уравновешивающей давление в рассматриваемой точке жидкости. Нормальное атмосферное давление уравновешивается столбом воды высотой $10,33 м$ и высотой столба ртути $0,760 м$ ($760 мм$). Одна техническая атмосфера отвечает высоте водяного столба, равной $10 м$.

В метеорологии атмосферное давление измеряют в барах и миллиметрах. $1 бар$ равен $1,019 кг/см^2$ и соответствует высоте ртутного столба, равной $750,08 мм$. Единицами давления в одну тысячную бара, т. е. миллибарами ($мб$), пользуются для выражения давления при составлении барических карт атмосферы, применяемых при прогнозах погоды.

Для измерения гидростатического давления существует ряд приборов. Избыточное давление (превышающее атмосферное) $p^* = \gamma h_p$ измеряется пьезометрами и манометрами, а давление меньше атмосферного — вакуумметрами.

Пьезометры применяются для измерения небольших давлений — десятых и сотых долей атмосферы; для измерения значительных давлений применяют жидкостные манометры, заполняемые жидкостью с большим удельным весом, например ртутью.

Ртутный манометр представляет собой U-образную стеклянную трубку, колено которой заполнено ртутью. Один конец трубки присоединяется к сосуду, давление в котором измеряется, второй конец остается открытым. Добавочное гидростатическое давление измеряется пьезометрической высотой h_p — разностью уровней ртути в обоих коленах трубки

$$p^* = \gamma h_p = 13,6 h_p \quad т^*/м^2.$$

Ртутные манометры отличаются большой точностью, но вследствие громоздкости для измерения больших давлений не применяются.

Для измерения высоких давлений применяются пружинные стрелочные манометры. Вакуумметры показывают недостаток давления до атмосферного. Они бывают как жидкостными, так и пружинными и по своему устройству похожи на манометры.

§ 4. Давление на стенки

Рассмотрим вопрос об определении давления на горизонтальную стенку. Общее давление dP , действующее на элементарную площадку, размер которой равен $d\omega$, определяется соотношением

$$dP = p d\omega.$$

Напряжение давления во всех точках горизонтальной стенки постоянно и равно

$$p = p_0 + \gamma h,$$

где h — глубина погружения стенки. Суммарная сила давления P на горизонтальную стенку выражается равенством

$$P = p\omega,$$

или

$$P = (p_0 + \gamma h)\omega. \quad (2.24)$$

Последнее выражение можно записать таким образом:

$$P = p_0\omega + \gamma h\omega. \quad (2.25)$$

Эта формула применяется для вычисления полного суммарного давления на горизонтальную стенку.

Если интерес представляет только избыточное давление (манометрическое), то вычисление ведется по формуле

$$P^* = \gamma h\omega. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.24) поясняет так называемый гидростатический парадокс, заключающийся в том, что давление жидкости на дно сосудов различной формы, но одинаковой высоты и с одинаковой площадью дна оказывается одинаковым.

Перейдем к вопросу о давлении на наклонную плоскую стенку. Определим суммарную силу манометрического давления на наклонную стенку постоянной ширины b , изображенную на рис. 2.4. Обозначения, принятые в формулах, указаны на рисунке.

Давление на элементарную площадку $d\omega$, обозначаемое через dP (значок * опускаем), выразится равенством

$$dP = \gamma h d\omega,$$

причем $d\omega = b dy$.

Из рисунка видно, что

$$y = \frac{h}{\sin \alpha}; \quad dy = \frac{dh}{\sin \alpha},$$

где α — угол, образуемый поверхностью жидкости и стенкой. После подстановок получим

$$dP = \frac{\gamma b}{\sin \alpha} h dh.$$

Интегрируем это уравнение:

$$P = \frac{\gamma b}{\sin \alpha} \int h dh + C_1.$$

Постоянная интегрирования C_1 в данном случае равна нулю, так как при $h=0$ $P=0$ (на свободной поверхности манометри-

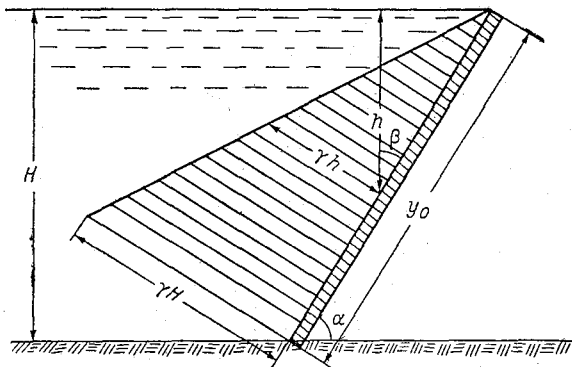


Рис. 2.4. Эпюра гидростатического давления на наклонную стенку.

(ось y имеет начало у поверхности воды и расположена вдоль стенки).

ческое давление равно нулю). Таким образом, окончательно находим

$$P = \frac{\gamma b}{2 \sin \alpha} h^2. \quad (2.27)$$

Эта формула дает общую величину силы манометрического давления на стенку в пределах от поверхности до глубины h . Если нижний край стенки находится на глубине H , то давление на всю стенку будет равно

$$P = \frac{\gamma b}{2 \sin \alpha} H^2. \quad (2.28)$$

При той же глубине давление на вертикальную стенку ($\alpha = 90^\circ$; $\sin \alpha = 1$) того же размера определяется равенством

$$P = \frac{\gamma b}{2} H^2. \quad (2.29)$$

Сравнивая это равенство с равенством (2.28), видим, что давление на наклонную стенку можно выразить через давление на вертикальную стенку

$$P_{\text{накл}} = \frac{P_{\text{верт}}}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad P_{\text{накл}} = \frac{P_{\text{верт}}}{\cos \beta}, \quad (2.30)$$

где β — угол между наклонной и вертикальной стенками.

Определим теперь давление на вертикальную треугольную стенку.

Предположим, что треугольная стенка имеет форму равнобедренного треугольника с основанием B , расположенным вровень со свободной поверхностью воды и с вершиной, обращенной вниз. Полная высота стенки H , ширина стенки на глубине h равна b , причем

$$b = B - 2kh,$$

где

$$k = \frac{\frac{1}{2}B}{H}.$$

Дифференциал площади определяется равенством

$$d\omega = b \, dh.$$

После подстановки получим

$$d\omega = (B - 2kh) \, dh.$$

Дифференциал давления выражается следующим образом:

$$dP = p \, d\omega = \gamma h (B - 2kh) \, dh.$$

Интегрируем это уравнение и определяем произвольную постоянную интегрирования при учете граничного условия: свободной поверхности $h=0$ отвечает манометрическое давление $P_m=0$.

$$P = \frac{1}{2} \gamma B h^2 - \frac{2}{3} \gamma k h^3.$$

Суммарное давление на всю стенку от ее вершины до основания выразится равенством

$$P = \frac{1}{2} \gamma B H^2 - \frac{2}{3} \gamma k H^3.$$

Подставив значение k , получим окончательную формулу суммарного манометрического давления на вертикальную треугольную стенку

$$P = \frac{1}{6} \gamma B H^2. \quad (2.31)$$

Аналогичным способом можно получить общую формулу для силы гидростатического давления на плоскую стенку произвольного очертания

$$P = p_0 \omega + \gamma h_{ц.т. \omega}, \quad (2.32)$$

где $h_{ц.т.}$ — глубина погружения центра тяжести площади стенки.

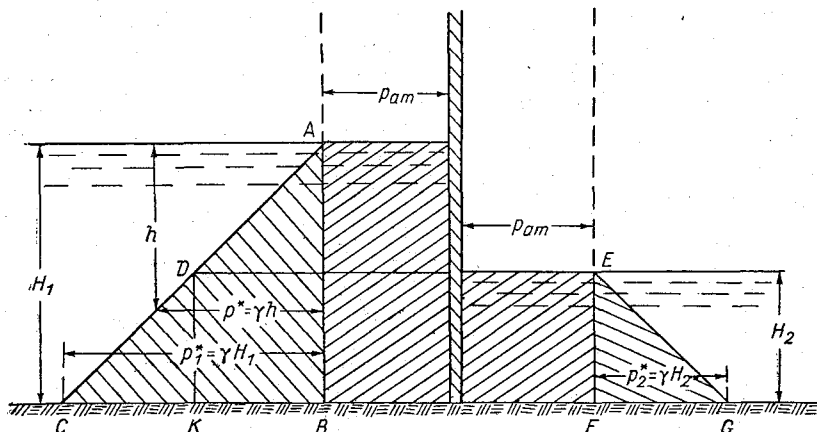


Рис. 2.5. Эпюры гидростатического давления на вертикальную стенку.

Гидростатическое давление на погруженное в воду тело наглядно может быть изображено в виде эпюры давления. Построим эпюры гидростатического давления на плоскую вертикальную стенку, испытывающую давление со стороны верхнего и нижнего бьефов, уровни в которых различны (рис. 2.5). Воспользуемся равенством

$$p = p_{ат} + \gamma h.$$

С обеих сторон от стенки на свободную поверхность жидкости действует одно и то же атмосферное давление $p_{ат}$. Графики $p_{ат}$ со стороны верхнего и нижнего бьефов изображаются вертикальными прямыми, отстоящими от стенки на расстоянии, равном $p_{ат}$. Обычно в гидротехнике при исчислении давления не принимают в расчет атмосферное давление $p_{ат}$, так как его действие в верхнем и нижнем бьефах взаимно урав-

новешивается, а строят лишь эпюру избыточного (манометрического) давления $p^* = \gamma h$.

Избыточное давление на стенку пропорционально глубине h погружения некоторой точки этой стенки от поверхности жидкости. Удельный вес жидкости γ определяет угловой коэффициент уравнения прямой $p^* = \gamma h$. Для воды коэффициенту $\gamma = 1$ отвечает прямая, проведенная под углом 45° к стенке. Эпюры избыточного давления на вертикальную стенку со стороны бьефов изображаются равнобедренными прямоугольными треугольниками, катеты которых равны глубинам погружения стенки (треугольники ABC и EFG на рис. 2.5, причем $AB = BC = H_1$, $EF = FG = H_2$). Результирующее давление на стенку равно разности площадей эпюр давления по обеим сторонам стенки и изображается трапецией $ABKD$.

Так как суммарное давление на единицу ширины плоской прямоугольной стенки равно площади эпюры давления, то равнодействующая сил избыточного давления P , действующая по нормали к стенке, должна проходить через центр тяжести эпюры давления.

Центр давления — это точка приложения равнодействующей силы гидростатического давления. В случае плоской прямоугольной стенки он находится в точке пересечения оси симметрии стенки с перпендикуляром, опущенным из центра тяжести эпюры давления. Центр давления расположен всегда на оси симметрии стенки ниже ее центра тяжести.

При построении эпюр давления на наклонную стенку ординаты γh должны откладываться перпендикулярно к стенке, а глубины исчисляться по вертикали независимо от наклона стенки.

Определим среднее значение давления (напряжения) на плоскую стенку. Эта величина выражается равенством

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega},$$

где P — суммарная сила давления на стенку.

Найдем выражения среднего значения давления для рассмотренных выше случаев давления на плоские стенки, разделив величины суммарного давления [см. формулы (2.28), (2.29) и (2.31)] на соответствующие значения площадей стенок.

Для наклонной стенки постоянной ширины (см. рис. 2.4) получим

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega} = \frac{\frac{\gamma b H^2}{2 \sin \alpha}}{\frac{b H}{\sin \alpha}} = \gamma \frac{H}{2}. \quad (2.33)$$

Среднее напряжение давления на вертикальную прямоугольную стенку выразится, очевидно, равенством

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega} = \frac{\gamma b \frac{H^2}{2}}{bH} = \gamma \frac{H}{2}, \quad (2.34)$$

а среднее давление на вертикальную треугольную стенку определяется следующим образом:

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega} = \frac{\gamma B \frac{H^2}{6}}{\frac{1}{2} BH} = \gamma \frac{H}{3}. \quad (2.35)$$

Заметим, что центр тяжести прямоугольной стенки расположен на глубине $H/2$ как при вертикальном, так и при наклонном ее положении, а центр тяжести треугольника, имеющего основание на поверхности воды и вершину на глубине H , расположен на расстоянии $H/3$ от поверхности. Следовательно, формулы (2.33), (2.34) и (2.35) представляют собой не что иное, как выражения давления в центрах тяжести рассматриваемых фигур, т. е.

$$p_{\text{ср}} = p_{\text{ц.т.}}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что среднее давление (напряжение давления) на плоские фигуры равно давлению в центрах тяжести этих фигур. Сила давления на плоскую стенку равна произведению смоченной площадки стенки на давление в центре ее тяжести. Для вычисления давления на стенку достаточно найти глубину погружения центра тяжести ее смоченной части и определить давление в этой точке. Произведение найденного давления на площадь погруженной в воду части стенки дает силу давления на стенку.

Сила давления P на криволинейную поверхность вычисляется по ее составляющим P_x , P_z , P_y на координатные оси x , z и y , при этом

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (2.36)$$

Проекции силы давления вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \gamma h'_{\text{ц.т.}x\omega_x}; \\ P_z &= \gamma h'_{\text{ц.т.}z\omega_z}; \\ P_y &= \gamma h'_{\text{ц.т.}y\omega_y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

в которых ω_x , ω_z и ω_y — проекции криволинейной поверхности на координатные плоскости yOz , xOy и xOz . Индексами при величине ω

показана нормаль к соответствующей проекции площадки. Именно по этой нормали и действует составляющая давления. Через $h'_{ц.т.,x}$, $h'_{ц.т.,z}$ и $h'_{ц.т.,y}$ обозначены глубины погружения центров тяжести проекций площадей.

В отношении проекции, направленной по вертикали (P_y), заметим, что иначе она может быть выражена формулой

$$P_y = \gamma W_d. \quad (2.38)$$

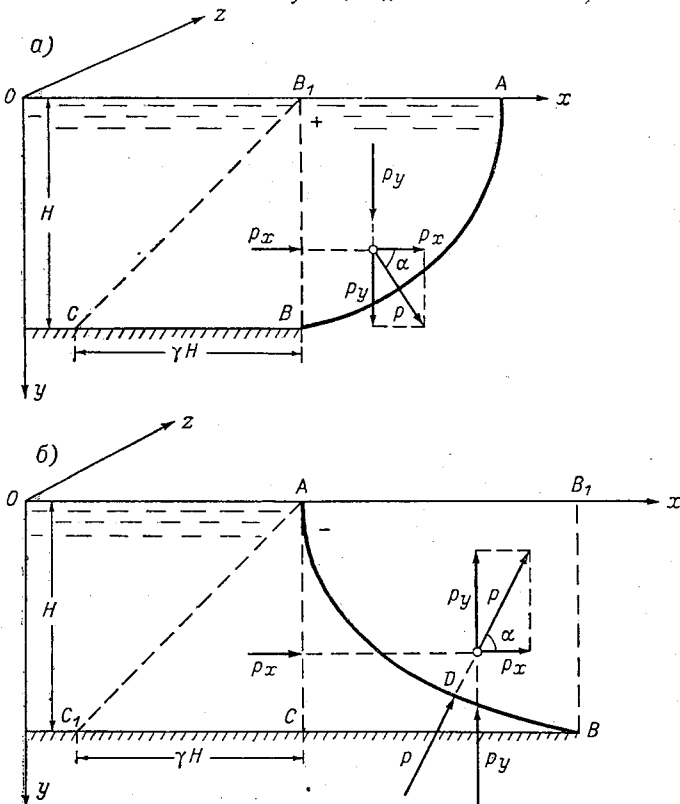


Рис. 2.6. Эпюры гидростатического давления на цилиндрическую поверхность.

где W_d — так называемый объем тела давления, т. е. объем, образуемый телом, ограниченным снизу криволинейной стенкой, сверху свободной поверхностью жидкости, а с боков вертикальной цилиндрической поверхностью с направляющей, которая совпадает с контуром подводной части изучаемой криволинейной стенки.

Рассмотрим давление на цилиндрическую поверхность. Оно будет иметь две составляющие, так как координатные оси можно

расположить таким образом, чтобы одна из них была параллельна образующей цилиндра. Пусть образующая цилиндра горизонтальна и перпендикулярна к плоскости чертежа xOy (рис. 2.6), тогда цилиндрическая поверхность будет проектироваться на эту плоскость в виде кривой AB . Проекция силы давления на ось z будет равна нулю. Равнодействующая силы давления на цилиндрическую поверхность выразится равенством

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2},$$

причем горизонтальная составляющая окажется равной давлению на плоскую вертикальную прямоугольную стенку (B_1B на рис. 2.6 *a* или AC на рис. 2.6 *b*), представляющую собой проекцию цилиндрической поверхности на плоскость yOz . Она может быть выражена площадью эпюры давления CB_1B (рис. 2.6 *a*) или C_1AC (рис. 2.6 *b*).

Очевидно, что

$$p_x = \gamma \frac{H^2}{2}.$$

Вертикальная составляющая давления на рассматриваемую цилиндрическую поверхность равна весу жидкости в объеме тела давления W_d , ограниченного контурами B_1AB (рис. 2.6 *a*) или AB_1B (рис. 2.6 *b*), т. е.

$$p_y = \gamma W_d = G.$$

Заметим, что в зависимости от формы цилиндрической поверхности и ее расположения по отношению к жидкости вертикальная составляющая давления p_y может быть как положительной, направленной вниз (надавливающий эффект, рис. 2.6 *a*), так и отрицательной, направленной вверх (выталкивающий эффект (рис. 2.6 *b*)). Зная составляющие p_x и p_y , можно определить величину и направление силы давления P по правилу параллелограмма (рис. 2.6). Угол наклона равнодействующей P к горизонту определится одним из следующих соотношений:

$$\frac{p_y}{p} = \sin \alpha; \quad \frac{p_x}{p} = \cos \alpha; \quad \frac{p_y}{p_x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Центр давления D , являющийся точкой приложения равнодействующей силы давления P , может быть определен графически. Он расположен на проекции цилиндрической поверхности на плоскость чертежа AB , в точке пересечения ее с вектором P . При этом вектор P должен проходить под углом α к горизонту через точку пересечения составляющих p_x и p_y или прямых, их продолжающих (рис. 2.6).

§ 5. Плавание тел

Рассмотрим полностью погруженное в воду тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, который расположен таким образом, что две его грани параллельны водной поверхности. Следует найти равнодействующую гидростатического давления, приложенного к параллелепипеду, изображенному на рис. 2.7.

Сила гидростатического давления, действующая на правую грань, уравновешивается силой, действующей на левую грань;

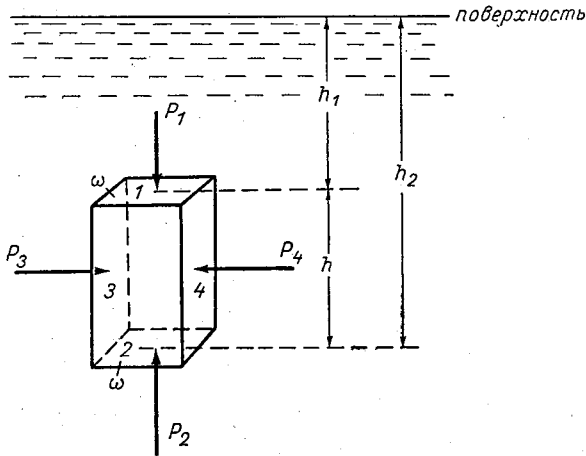


Рис. 2.7.

также уравновешиваются силы давления, действующие на грани, обращенные к нам и от нас, таким образом для боковых граней имеем:

$$p_3 ah - p_4 ah = 0;$$

$$p_5 bh - p_6 bh = 0.$$

Давление на верхнюю (1) и нижнюю (2) грани (рис. 2.7) соответственно будет равно:

$$p_1 = p_0 + \gamma h_1;$$

$$p_2 = p_0 + \gamma h_2.$$

Значения полной силы давления, очевидно, определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= p_1 \omega = p_0 \omega + \gamma h_1 \omega; \\ P_2 &= p_2 \omega = p_0 \omega + \gamma h_2 \omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Здесь ω — площадь поверхности верхней и нижней граней. Вычислим равнодействующую сил давления.

$$P = P_2 - P_1 = \gamma\omega(h_2 - h_1), \quad (2.40)$$

но

$$h_2 - h_1 = h.$$

Итак, равнодействующая сил гидростатического давления определяется равенством

$$P = \gamma\omega h. \quad (2.41)$$

Объем параллелепипеда выражается зависимостью

$$V = \omega h,$$

а вес воды в объеме параллелепипеда F_b определяется произведением

$$F_b = \gamma\omega h. \quad (2.42)$$

Сравнивая равенства (2.46) и (2.47), приходим к выводу, что

$$P = F_b. \quad (2.43)$$

Это соотношение является краткой записью закона Архимеда, который более подробно можно изложить так: равнодействующая гидростатического давления, оказываемого на погруженное в воду тело, равна весу воды в объеме, вытесненном телом, или иначе — тело, погруженное в воду, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им вода. Именно эта потеря веса и равна равнодействующей гидростатического давления.

Заметим, что наш вывод был сделан применительно к случаю объема, имеющего форму параллелепипеда. Однако, тело любой формы может рассматриваться как составленное из элементарных параллелепипедов, поэтому доказанный выше закон является общим для тел любой формы.

Рассмотрим теперь условия плавучести тел. Тело, погруженное в жидкость, находится под влиянием двух сил: силы тяжести (веса тела) G , действующей по вертикали сверху вниз, и подъемной силы — равнодействующей давления P , равной весу вытесненной телом жидкости $P = \gamma V$ (здесь V — объем вытесненной телом жидкости) и направленной по вертикали снизу вверх. В зависимости от соотношения веса G погруженного в воду тела и равнодействующей давления P возможны три случая:

а) вес тела больше веса вытесненной им жидкости ($G > P$) — тело тонет;

б) вес тела равен весу вытесненной им жидкости при полном погружении ($G = P$) — тело находится во взвешенном состоянии, т. е. плавает внутри жидкости в состоянии безразличного равновесия;

в) вес тела меньше подъемной силы давления ($G < P$) — тело всплывает и будет плавать при частичном погружении, отвечающем равенству между полным весом тела и весом вытесняемой им жидкости.

Точка приложения подъемной силы P (т. е. равнодействующей давления, которая равна весу жидкости в объеме, вытесненном плавающим телом) именуется центром давления. Она совпадает с центром тяжести объема жидкости, вытесненной плавающим телом, и называется также центром водоизмещения (обозначаем буквой D). Линия $O—O$, проходящая через центр тяжести тела C и центр водоизмещения D , называется осью плавания. Разные положения этой линии показаны на рис. 2.8, где изображены тела подводного плавания. Если тело находится в равновесии, то ось плавания занимает вертикальное положение

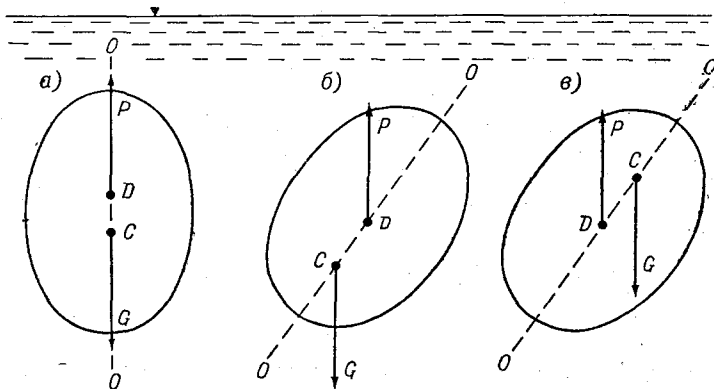


Рис. 2.8. Силы, действующие на тело, погруженное в жидкость.

(рис. 2.8 а). При крене ось плавания занимает наклонное положение, в результате чего образуется вращающая пара сил, которая может либо вернуть тело в первоначальное положение (рис. 2.8 б), либо увеличить крен (рис. 2.8 в).

Способность тела, плавающего в неподвижной воде, восстанавливать равновесие после прекращения действия внешней силы, вызвавшей нарушение равновесия, называется **статической остойчивостью**.

Рассмотрим условие остойчивости тела при подводном плавании, т. е. при полном его погружении. Обращаясь к рис. 2.8, видим, что в том случае, когда центр водоизмещения D лежит выше центра тяжести C , пара сил P и G стремится уничтожить крен и восстановить первоначальное положение, если же центр давления лежит ниже центра тяжести, то силы P и C образуют пару, стремящуюся увеличить крен. Следовательно, можно сделать вывод: тело, плавающее под водой, обладает статической остойчивостью, если центр водоизмещения находится выше центра тяжести.

Рассмотрим условия остойчивости тела при надводном плавании. Покажем, что при надводном плавании тело может сохранять остойчивость и в том случае, если центр тяжести его расположен выше центра водоизмещения. В случае крена объем водоизмещения изменит свою симметричную форму и центр водоизмещения переместится из начального положения D на оси плавания, совпадающей с осью симметрии $O-O$, в точку D' (рис. 2.9). Условие остойчивости в данном случае определится положением точки пересечения вертикальной линии действия подъемной силы при крене, проведенной через точку D' , с осью плавания $O-O$. Эта точка называется метацентром и обозначена на рис. 2.9 буквой M . Расстояние между центром водоизмещения D

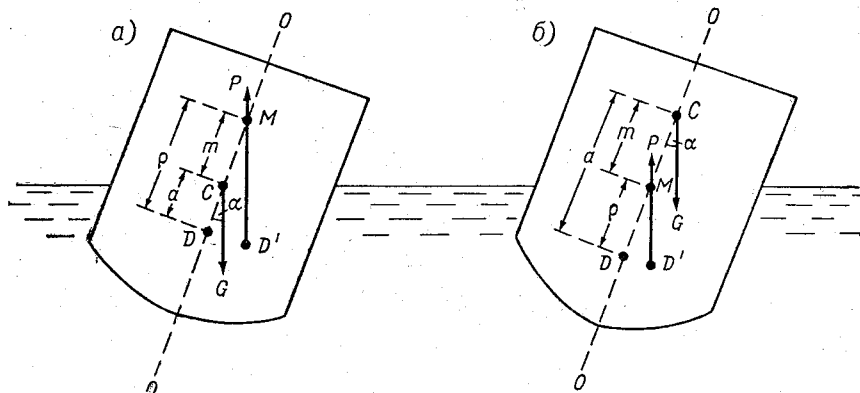


Рис. 2.9. Устойчивое и неустойчивое равновесие плавающего тела.

и метацентром M называется метацентрическим радиусом ρ , расстояние от центра тяжести C до метацентра называется метацентрической высотой m . Величина m считается положительной, если метацентр расположен выше центра тяжести.

Как видно из схем действия сил (рис. 2.9 а и 2.9 б), тело, плавающее на поверхности, сохраняет остойчивость в том случае, если метацентр M лежит выше центра тяжести C (при этом последний может находиться выше центра водоизмещения D); если же метацентр M расположен ниже центра тяжести C , то пара сил P и G стремится увеличить крен.

Таким образом, условия остойчивости плавающего на поверхности тела можно записать следующим образом:

равновесие устойчивое, если $m = \rho - a > 0$,

равновесие неустойчивое, если $m = \rho - a < 0$,

равновесие безразличное, если $m = \rho - a = 0$.

Полученные соотношения применимы лишь при малых углах крена ($\alpha < 15^\circ$). Остойчивость судов при значительных углах крена рассматривается в специальных курсах.

РАВНОМЕРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ
В ТРУБАХ, КАНАЛАХ И РЕКАХ

§ 1. Напорное и безнапорное движение жидкости.
Уравнение равномерного движения в трубах

В гидравлике различают напорное и безнапорное движение жидкости. Напорным называется такое движение жидкости, при котором поперечное сечение потока ограничено со всех сторон твердыми стенками, а давление в любой точке потока отличается от атмосферного.

Безнапорным движением называется такое, при котором лишь часть сечения потока ограничена твердыми стенками, а другая часть свободно сообщается с атмосферой; давление на поверхности такого потока равно атмосферному давлению на уровне свободной поверхности. Движение воды в реках и в открытых каналах является безнапорным.

На рис. 3.1 приведены примеры напорного (а) и безнапорного (б) потоков. На рисунке показаны пьезометрические трубки, подведенные к разным точкам периметров поперечных сечений потоков. Через p_0 обозначено атмосферное давление. Давление в точках c и d напорного потока равно соответственно p_c и p_d , причем $p_c > p_0$ и $p_d > p_0$. В безнапорном потоке на свободной поверхности, в точке e , давление равно p_0 , т. е. атмосферному, а в точке f больше атмосферного на величину $p_f = \gamma h_f$, где h_f — высота столба жидкости в потоке над точкой f .

Движение жидкости в трубах большей частью является напорным. Примером могут служить обычные городские водопроводы, напор в которых позволяет подавать воду на верхние этажи многоэтажных зданий. Нередки, однако, случаи и безнапорного движения в трубах, когда часть сечения трубы остается незаполненной водой и сообщается с атмосферой. Движение сточных вод в канализационных трубах часто является безнапорным.

Рассмотрим равномерное установившееся напорное движение воды в круглой трубе, имеющей постоянное поперечное сечение, т. е. отвечающее условиям:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\omega = \text{const}, \quad Q = \text{const},$$

где ω — площадь поперечного сечения трубы.

Чтобы составить уравнение движения, обратимся к изображенной на рис. 3.2 схеме потока и выясним, какие силы

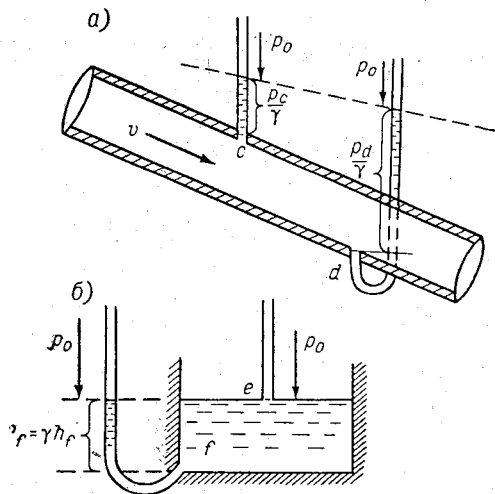


Рис. 3.1. Схемы напорного (а) и безнапорного (б) потоков (p_0 — атмосферное давление).

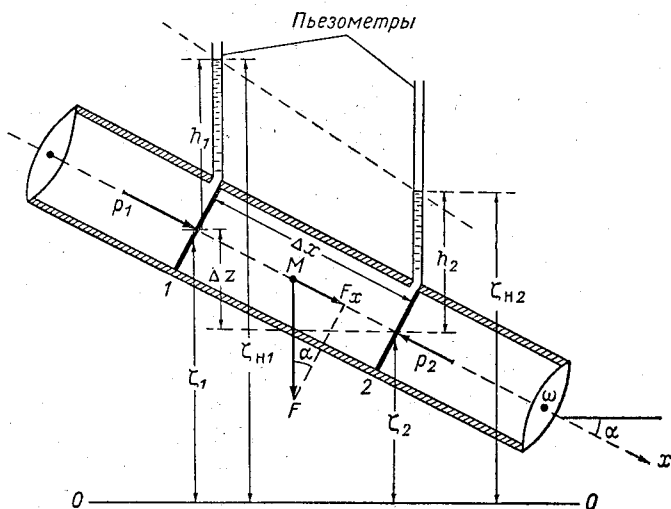


Рис. 3.2. Схема к выводу уравнения равномерного движения напорного потока.

действуют на контрольный объем, ограниченный сечениями 1 и 2 и имеющий длину Δx . Через ζ_1 и ζ_2 на рисунке показаны высотные отметки (уровни) центров тяжести сечений 1 и 2 над горизонтальной плоскостью сравнения 00 . Наклон продольной оси трубы по отношению к плоскости 00 равен углу α . Превышение центра сечения 1 над центром сечения 2 равно Δz , т. е.

$$\Delta z = \zeta_1 - \zeta_2.$$

Слева и справа на выделенный объем действует гидростатическое давление, оно приложено к ограничивающим объем поверхности поперечных сечений 1 и 2 и равно соответственно p_1 и p_2 . Полная сила давления на каждое из этих сечений определяется произведением давления p на площадь сечения ω . Результирующая полной силы давления P_p определится разностью

$$P_p = p_1\omega - p_2\omega = \omega(p_1 - p_2). \quad (3.1)$$

Сила тяжести F , приложенная к центру тяжести M контрольного объема, выражается равенством

$$F = \gamma\omega \Delta x.$$

Найдем составляющую силы тяжести по направлению движения x

$$F_x = \gamma\omega \Delta x \sin \alpha. \quad (3.2)$$

Сила гидродинамического сопротивления для турбулентного потока пропорциональна квадрату средней скорости течения v_{cp} , а также поверхности трения, которая в рассматриваемом случае равна произведению $\chi\Delta x$, где χ — смоченный периметр, т. е. периметр поперечного сечения трубы. Обозначим через T силу сопротивления и напишем

$$T = k\chi \Delta x v_{cp}^2, \quad (3.3)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Уравнение движения составляется по условию равновесия действующих сил, т. е.

$$F_x + P_p = T. \quad (3.4)$$

Подставляя значения входящих в уравнение (3.4) величин, находим

$$\gamma\omega \Delta x \sin \alpha + \omega(p_1 - p_2) = k\chi \Delta x v_{cp}^2.$$

Разделим все уравнение на $\gamma\omega\Delta x$

$$\sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\gamma \Delta x} = \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\chi}{\omega} v_{cp}^2. \quad (3.5)$$

На рис. 3.2 изображены пьезометрические трубки, установленные в сечениях 1 и 2. По высоте напора в этих трубках h_1 и h_2 получаем давления p_1 и p_2 . Очевидно, что

$$p_1 = p_0 + \gamma h_1;$$

$$p_2 = p_0 + \gamma h_2,$$

где p_0 — атмосферное давление.

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma \Delta x} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta x}.$$

Легко заметить, что

$$\sin \alpha = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\Delta x}.$$

Подставим два последних равенства в выражение (3.5) и напишем

$$\frac{1}{\Delta x} (\zeta_1 + h_1 - \zeta_2 - h_2) = \frac{k v_{\text{ср}}^2}{\gamma R}; \quad (3.6)$$

в правую часть этого равенства введен гидравлический радиус

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

Через $\zeta_{\text{н}1}$ и $\zeta_{\text{н}2}$ на рис. 3.2 обозначены значения пьезометрического напора соответственно в сечениях 1 и 2

$$\zeta_{\text{н}1} = \zeta_1 + h_1;$$

$$\zeta_{\text{н}2} = \zeta_2 + h_2.$$

Введем понятие пьезометрического уклона, который будем обозначать через $I_{\text{п}}$ и выражать следующим равенством:

$$I_{\text{п}} = \frac{\Delta \zeta_{\text{н}}}{\Delta x} = \frac{\zeta_{\text{н}1} - \zeta_{\text{н}2}}{\Delta x}.$$

Теперь уравнение равномерного движения в трубе приобретает вид

$$I_{\text{п}} = \frac{k}{\gamma} \frac{v_{\text{ср}}^2}{R}. \quad (3.7)$$

В этой формуле величина k является опытным коэффициентом. Его принято выражать двояким способом: через коэффициент C , именуемый коэффициентом Шези, или через безразмерный коэффициент трения λ .

В первом случае

$$\frac{k}{\gamma} = \frac{1}{C^2},$$

во втором

$$\frac{k}{\gamma} = \frac{\lambda}{8g};$$

где g — ускорение силы тяжести.

Получаем два варианта записи уравнения равномерного движения в трубах:

$$I_{\text{п}} = \frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 R}. \quad (3.8)$$

Это так называемое уравнение Шези,

и второй вариант

$$I_{\text{п}} = \frac{\lambda v_{\text{ср}}^2}{8gR}. \quad (3.9)$$

Учитывая, что для круглой трубы

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4\pi d} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2}$$

(где D — диаметр, а r — радиус трубы), записываем выражение (3.9) следующим образом:

$$I_{\text{п}} = \frac{\lambda}{D} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g}. \quad (3.10)$$

Эта формула называется формулой Вейсбаха—Дарси. Для потока с вполне развитым турбулентным режимом коэффициент λ зависит только от относительной шероховатости $\frac{\Delta}{D}$, где Δ — высота выступов шероховатости стенок трубы.

В ряде случаев основное уравнение равномерного движения записывают в виде

$$\frac{\tau}{\gamma} = R I_{\text{п}},$$

где τ — касательное напряжение на границе потока и стенки.

Рассмотрим более детально формулу Шези (3.8), которая для напорного потока в трубе может быть записана следующим образом:

$$v_{\text{ср}} = \frac{C}{2} \sqrt{D I_{\text{п}}}. \quad (3.11)$$

Коэффициент C является величиной переменной. Экспериментально установлено, что C зависит от шероховатости стенок

трубы n и гидравлического радиуса и может быть выражен формулой

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4} \right)^{1/6}. \quad (3.12)$$

Эта формула называется формулой Маннинга. Заметим, что, подобно коэффициенту λ , коэффициент C может быть представлен как функция относительной шероховатости.

Коэффициент Шези широко используется в гидравлике открытых русел и содержится во многих расчетных формулах, относящихся как к простым, так и к очень сложным задачам. В связи с этим более подробное рассмотрение коэффициента C выполнено ниже в разделе о равномерном движении открытых потоков.

Полученные в настоящем параграфе формулы позволяют решать многие задачи о течении воды в трубах постоянного сечения. Формулы (3.8)—(3.10) дают возможность непосредственно определить пьезометрический уклон в трубопроводе, обеспечивающий заданную скорость течения в нем. Пьезометрический уклон, обеспечивающий заданный расход воды Q в трубопроводе, находится по формуле

$$I_{\pi} = \frac{Q^2}{C^2 \omega^2 R},$$

а расход соответственно выражается зависимостью

$$Q = \omega C \sqrt{R I_{\pi}}.$$

§ 2. Уравнение равномерного установившегося движения открытого потока

Выделим в потоке двумя сечениями 1 и 2, перпендикулярными поверхности и дну, некоторый объем длиной Δx (рис. 3.3). Величина объема будет выражаться равенством

$$V = \omega \Delta x,$$

где ω — площадь поперечного сечения потока.

Покажем на рисунке действующие силы: 1) массовую силу — силу тяжести F , 2) равнодействующую силу гидродинамического давления, 3) гидродинамическое сопротивление.

Начнем с рассмотрения равнодействующей силы гидродинамического давления P_p , действующей на выделенный объем,

$$P_p = p_1 \omega - p_2 \omega,$$

где

$$p_1 = p_0 + \gamma h_1,$$

$$p_2 = p_0 + \gamma h_2.$$

Подставляя два последних равенства в первое, находим

$$P_p = \gamma \omega (h_1 - h_2).$$

Поскольку принято условие неизменности поперечного сечения по величине и форме и наличие постоянного уклона водной поверхности, очевидно, что глубина центра тяжести сечения будет одинаковой для поперечников 1 и 2, т. е. $h_1 = h_2$. Отсюда следует, что

$$P_p = 0.$$

Рассмотрим теперь действие силы тяжести F . Очевидно, что

$$F = \gamma V = \gamma \omega \Delta x.$$

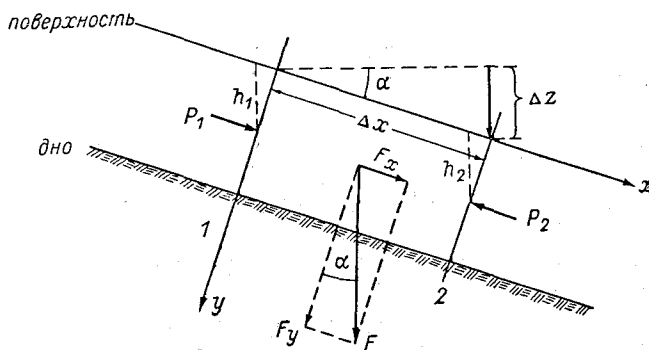


Рис. 3.3. Схема к выводу уравнения равномерного движения открытого потока.

Составляющая силы тяжести по оси y , т. е. величина F_y , уравнивается реакцией дна и не оказывает влияния на движение жидкости в направлении оси x . Движение определяется составляющей силы тяжести F_x , т. е. ее проекцией на направление движения,

$$F_x = \gamma V \sin \alpha = \gamma \omega \Delta x \sin \alpha. \quad (3.13)$$

Составляющую силы тяжести F_x можно назвать активной силой, поскольку она вызывает поступательное движение жидкости. Выполненное выше рассмотрение действующих сил показало, что в данном случае имеется только одна активная сила, именно F_x . Поскольку движение установившееся и равномерное, постольку эта сила должна уравниваться силой гидродинамического сопротивления (трения) T . Величина T пропорциональна поверхности трения $\chi \Delta x$ (χ — смоченный периметр). При турбулентном движении сопротивление всего потока в целом

пропорционально квадрату средней скорости течения $v_{\text{ср}}$. Поэтому можем написать

$$T = k\chi \Delta x v_{\text{ср}}^2, \quad (3.14)$$

где k — обобщенный коэффициент пропорциональности.

Итак, записываем

$$F_x = T. \quad (3.15)$$

Подставляя значения F_x и T , получаем

$$\gamma \omega \Delta x \sin \alpha = k\chi \Delta x v_{\text{ср}}^2,$$

или

$$\gamma \frac{\omega}{\chi} \sin \alpha = k v_{\text{ср}}^2; \quad (3.16)$$

$\sin \alpha$ можно определить через падение Δz свободной поверхности и длину отсека потока Δx , т. е.

$$\sin \alpha = \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Это отношение называют уклоном свободной поверхности потока. Будем обозначать его через I , т. е.

$$I = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \sin \alpha. \quad (3.17)$$

Это точное выражение уклона. В гидравлике и в гидрологии при малых значениях уклона часто используют приближенное выражение этой величины, принимая

$$I \cong \frac{\Delta z}{\Delta x_1} = \text{tg } \alpha, \quad (3.18)$$

где Δx_1 — расстояние между створами, измеряемое по горизонтальной линии. Как известно, такие расстояния показаны на топографических планах и картах.

Величину коэффициента пропорциональности k , как и в предыдущем разделе, записываем следующим образом:

$$k = \frac{\gamma}{C^2},$$

где C , как и выше, — коэффициент Шези.

Приходим к следующей записи уравнения:

$$\gamma R I = \frac{\gamma}{C^2} v_{\text{ср}}^2.$$

Вместо отношения $\frac{\omega}{\chi}$ сюда введен гидравлический радиус потока.

Окончательно приходим к следующему виду уравнения:

$$I = \frac{v_{\text{cp}}^2}{C^2 R}. \quad (3.19)$$

Это и есть уравнение установившегося равномерного движения жидкости (уравнение Шези). Для очень широких открытых потоков можно принять $R \cong H_{\text{cp}}$, где H_{cp} — средняя глубина потока в поперечном сечении ($H_{\text{cp}} = \frac{\omega}{B}$,³ для широкой реки $B \cong \chi$).

Для данного случая уравнение записывается так:

$$I = \frac{v_{\text{cp}}^2}{C^2 H_{\text{cp}}}. \quad (3.20)$$

Разрешая полученное уравнение относительно скорости, будем иметь наиболее часто встречаемую запись уравнения Шези

$$v_{\text{cp}} = C \sqrt{RI}, \quad (3.21)$$

или

$$v_{\text{cp}} = C \sqrt{H_{\text{cp}} I}. \quad (3.22)$$

Для открытых потоков, как и для закрытых, коэффициент C не является величиной постоянной, а зависит от глубины и шероховатости русла.

Здесь отметим очень важное свойство турбулентного потока, т. е. зависимость его сопротивления от шероховатости русла. Потоки, имеющие ламинарный режим, характеризуются независимостью сопротивления от шероховатости; их сопротивление связано исключительно с физической вязкостью воды.

В турбулентных потоках сопротивление определяется турбулентной (или виртуальной) вязкостью, которая в свою очередь зависит от характерных величин потока: глубины, скорости течения и шероховатости русла. Чем более гладкое русло, тем меньше при прочих равных условиях интенсивность турбулентного перемешивания, виртуальная вязкость, а следовательно, и сопротивление T и, наоборот, чем больше шероховатость, тем больше виртуальная вязкость и сопротивление T .

Для нахождения C , как указывалось выше, существует ряд эмпирических формул. В первую очередь надо отметить формулу Маннинга (3.12), которая для открытого широкого потока записывается так:

$$C = \frac{1}{n} H_{\text{cp}}^{1/6}; \quad (3.23)$$

здесь n — коэффициент шероховатости, который находится по специальным эмпирическим таблицам. В табл. 3.1 приведены

Значения коэффициента шероховатости n каналов и труб

Характер стенки, русла	n
Исключительно гладкие поверхности (покрыты эмалью)	0,009
Отличная штукатурка из чистого цемента	0,010
Отличная цементная штукатурка (с примесью $1/3$ песка); новые гончарные и металлические хорошо уложенные трубы	0,011
Водопроводные трубы в нормальных условиях; хорошо бетонированные стенки	0,012
Несколько загрязненные трубы; бетонированные стенки в средних условиях	0,014
Каналы, покрытые устойчивым илистым слоем, находящиеся в отличном состоянии	0,018
Каналы в плотной глине; земляные каналы во вполне удовлетворительном состоянии	0,022
Земляные каналы в условиях ниже среднего; речные русла в очень благоприятных условиях	0,025
Каналы, находящиеся в плохих условиях; русла рек, находящиеся в относительно благоприятных условиях	0,035

значения n для каналов и труб. Формулой Маннинга наиболее часто пользуются для речных потоков и для каналов. Для каналов нередко используется также формула Н. Н. Павловского, имеющая вид

$$C = \frac{1}{n} R^y; \quad (3.24)$$

переменный показатель формулы y определяется зависимостью

$$y = 2,5n + 0,13 - 0,75 \sqrt{R} (\sqrt{n} - 0,1). \quad (3.25)$$

Другими формулами для коэффициента C (так, например, формулами Базена и Гангилье—Куттера) в настоящее время пользуются редко. Эти формулы можно найти в любом старом курсе гидравлики.

Существенное значение в речной гидравлике имеет формула Штриклера, которую можно привести к виду

$$C \cong 33 \left(\frac{H_{\text{ср}}}{d} \right)^{1/6}, \quad (3.26)$$

где d — некоторое среднее значение диаметра частиц донных отложений в мм.

оси потока (рис. 3.4) и оказывается криволинейной. Уклон водной поверхности выражается равенством

$$I = \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad (3.31)$$

где Δz — падение.

Предположим, что на двух профилях заданы отметки водной поверхности ζ_1 и ζ_2 (рис. 3.4). Разность отметок запишется так:

$$\Delta \zeta = \zeta_2 - \zeta_1$$

(по правилу нахождения приращения из последующей величины вычитается предыдущая). Через разность отметок может быть представлен уклон

$$I = -\frac{\Delta \zeta}{\Delta x}. \quad (3.32)$$

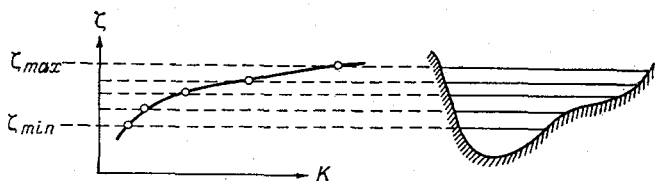


Рис. 3.5. Построение графика модуля расхода $K(\zeta)$.

Очевидно, что падение Δz и разность отметок связаны равенством

$$\Delta z = -\Delta \zeta.$$

При положительном уклоне

$$\Delta z > 0, \quad \Delta \zeta < 0.$$

При отрицательном уклоне

$$\Delta z < 0, \quad \Delta \zeta > 0.$$

Среднюю скорость v_{cp} в уравнении (3.30) можно представить через расход Q , деленный на площадь сечения потока, тогда

$$I = \frac{Q^2}{\omega^2 H_{cp} C^2}. \quad (3.33)$$

В гидравлике используется некоторая величина, называемая модулем расхода; она обозначается через K и определяется равенством

$$K = C\omega \sqrt{H_{cp}}. \quad (3.34)$$

Модуль K имеет размерность расхода, т. е. $m^3/сек$.

Коэффициент Шези C вычисляется по одной из формул, помещенных в предыдущем разделе. Содержащийся в формуле коэффициент шероховатости n находится по таблице, составленной для речных потоков (табл. 3.2).

Значения коэффициентов шероховатости для естественных водотоков
(по М. Ф. Срибному, с сокращениями)

№ категории	Характеристика русла	Коэффициент шероховатости n
1	Естественные русла в весьма благоприятных условиях (чистые, прямые, незасоренные со свободным течением)	0,025
2	Русла постоянных водотоков равнинного типа (преимущественно больших и средних рек) в благоприятных условиях состояния ложа и течения воды. Периодические потоки (большие и малые) при очень хорошем состоянии поверхности и формы ложа	0,033
3	Сравнительно чистые русла постоянных равнинных водотоков, в обычных условиях извилистые, с некоторыми неправильностями в направлении струй или же прямые, но с неправильностями в рельефе дна (отмели, промоины, местами камни). Земляные русла периодических водотоков (сухих логов) в относительно благоприятных условиях	0,040
4	Русла больших и средних рек значительно засоренные, извилистые и частично заросшие, каменистые, с беспокойным течением. Периодические (ливневые и весенние) водотоки с крупногалечным или покрытым растительностью (травой и пр.) ложем. Поймы больших и средних рек, сравнительно разработанные, покрытые травой и частично кустарником	0,050
5	Русла периодических водотоков, сильно засоренные и извилистые. Сравнительно заросшие, неровные, плохо разработанные поймы рек (промоины, кустарники, деревья с наличием заводей). Галечно-валунные русла горного типа. Порожистые участки равнинных рек	0,067
6	Реки и поймы, весьма значительно заросшие (со слабым течением), с большими глубокими промоинами. Валунные русла горного типа, течение бурное, пенистое	0,080
7	Поймы такие же, как в предыдущей категории, но с сильно неправильным косоструйным течением, заводьями и пр. Горно-водопадного типа русла, с крупновалунным извилистым строением ложа, перепады ярко выражены	0,100
8	Горные реки примерно те же, что и в седьмой категории. Реки болотного типа (заросли, кочки, местами почти стоячая вода). Поймы с очень большими мертвыми пространствами, с местными углублениями (озерами и пр.)	0,133
9	Глухие поймы (сплошь лесные)	0,200

Вводя в уравнение (3.33) модуль расхода, получаем

$$I = \frac{Q^2}{K^2}. \quad (3.35)$$

При этом для расхода имеем следующее выражение:

$$Q = K\sqrt{I}. \quad (3.36)$$

Очевидно, что K является функцией уровня воды. С изменением уровня воды изменяются ширина реки (рис. 3.5), площадь сечения, средняя глубина, коэффициент Шези. Вместе с этими величинами изменяется и модуль расхода K ; на рис. 3.5 изображен график $K(\zeta)$.

Формулы (3.35) и (3.36) служат для приближенных расчетов потоков, т. е. для определения уклона при известном расходе, вычисления расхода при заданном уклоне, для нахождения скорости течения и т. д.

§ 4. Построение кривых расходов речных потоков

Вычисление расходов воды по уравнению равномерного движения может быть выполнено для гидрометрического профиля при условии, что профиль расположен на относительно мало-извилистом участке реки, характеризующемся отсутствием расширения или сужения русла, резкого изменения глубин, отсутствием подпора и т. д. Заметим, что именно такие требования предъявляются в гидрологии к гидрометрическим створам.

Расчет расходов можно сделать для разных уровней. Эта задача сводится к теоретическому построению кривой расхода, которое выполняется по формуле

$$Q(\zeta) = \sqrt{I} K(\zeta). \quad (3.37)$$

Если I не зависит от уровня и является величиной постоянной, т. е. оказывается возможным принять $I = \text{const} = a^2$ (a — постоянная), то:

$$Q(\zeta) = aK(\zeta); \quad (3.38)$$

величина a может быть установлена экспериментально на основании единичных измерений по формуле

$$a_i = \frac{Q_i}{K_i}.$$

Частные значения a_i , a_{i+1} и т. д. иногда могут заметно различаться. Для расчета находится среднее значение a ($a_{\text{ср}}$).

По построенной заранее кривой модуля расходов при использовании $a_{\text{ср}}$ находятся значения расходов воды по формуле (3.38) и строится кривая расходов.

Рассмотрим теперь другой способ построения кривой расходов. Запишем формулу равномерного движения речного потока таким образом:

$$Q = C\omega \sqrt{H_{\text{ср}} I}. \quad (3.39)$$

Учитывая, что

$$C = \frac{1}{n} H_{\text{ср}}^{1/6} \quad \text{и} \quad \omega = H_{\text{ср}} B,$$

получаем

$$Q = \frac{\sqrt{I}}{n} H_{\text{ср}}^{5/3} B, \quad (3.40)$$

или

$$Q = k_* H_{\text{ср}}^{5/3} B, \quad (3.41)$$

где

$$k_* = \frac{\sqrt{I}}{n}.$$

На основании данных одного или нескольких измерений можно найти k_* по формуле

$$k_* = \frac{Q}{H_{\text{ср}}^{5/3} B},$$

а затем вычислить расходы для любого уровня по уравнению (3.41). Это уравнение удобно для экстраполяции кривой расхода до высоких уровней.

Рассмотрим способ построения кривой расхода при использовании коэффициентов шероховатости и значений морфометрических элементов речного русла. По единичным измерениям расходов Q и уклонов можно вычислить коэффициенты шероховатости n , пользуясь формулой

$$n = \frac{I^{1/2} H_{\text{ср}}^{5/3} B}{Q}. \quad (3.42)$$

Эта формула непосредственно получается из формулы (3.40). Строится график $n(\zeta)$, с которого снимают значения n и вычисляют для ряда уровней величины K или Q . При этом, если известно, что уклон изменяется, то строят график $K(\zeta)$. При постоянстве уклона строят сразу график $Q(\zeta)$. Если данные измерений расходов воды полностью отсутствуют, то для построения $Q(\zeta)$ применяется непосредственно формула (3.40), причем значения коэффициентов шероховатости берутся по таблице.

При наличии подпора или спада для расчета расходов пользуются другим приемом, о котором речь будет идти в главе о неравномерном режиме.

§ 5. Применение уравнения равномерного движения к отдельным вертикалям речного потока. Расчет распределения скоростей по ширине потока

Н. М. Бернадский показал, что уравнение равномерного движения может быть отнесено не только ко всему сечению потока, но и к отдельным его вертикалям. Для этого требуется, чтобы в зоне расположения вертикали течение было близким к равномерному. Для отдельной вертикали имеем

$$v_{\text{ср}} = C \sqrt{HI}.$$

Здесь уже H — глубина потока на вертикали, $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость на вертикали, I — уклон в зоне расположения вертикали, C — коэффициент Шези для данной вертикали. Элементарный расход на вертикали ($q = v_{\text{ср}}H$) может быть выражен следующим образом:

$$q = \frac{1}{n} H^{5/3} I^{1/2}. \quad (3.43)$$

Эти формулы могут использоваться для приближенного вычисления распределения скорости по ширине реки и уточненного вычисления расхода Q . Вычисления очень просты, особенно для случая прямолинейного русла простой формы, когда с достаточным приближением уклон по ширине реки (обозначим $I_{\text{общ}}$) можно принять постоянным. Для решения этой задачи используется формула

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} H^{2/3} I_{\text{общ}}^{1/2}.$$

Коэффициент шероховатости n находится по таблице Срибного или по имеющимся данным о крупности частиц грунта; величины H и n рассматриваются как функции поперечной координаты.

Для приближенной оценки расхода воды в реке поперечное сечение следует разбить вертикальными линиями на ряд участков, отличающихся более или менее постоянными глубинами и состоянием дна. Для каждого такого участка определяются средние глубины H_i площади поперечного сечения $\Delta\omega_i$ и коэффициенты шероховатости n_i . Полный расход реки вычисляется по формуле

$$Q = \sum_{i=1}^m v_{\text{ср}i} \Delta\omega_i = I_{\text{общ}}^{1/2} \sum_{i=1}^m \frac{H_i^{2/3}}{n_i} \Delta\omega_i, \quad (3.44)$$

где m — число участков, на которые разделен поперечный профиль.

Задача о распределении скоростей в поперечном сечении потока может быть решена с большей достоверностью, если известен расход реки (предположим, он установлен по кривой расхода $Q = \varphi(\xi)$, где ξ — уровень на водомерном посту). В этом случае, как и выше, поперечное сечение потока делится на m частей и находятся частные площади сечения $\Delta\omega_i$, средние глубины и коэффициенты шероховатости каждого из участков. Однако найденные в этом случае для участков коэффициенты шероховатости считаются «условными» ($n_{\text{усл}}$) и принимается, что с истинными величинами n они находятся в соотношении

$$n = \frac{1}{k_1} n_{\text{усл}},$$

где $\frac{1}{k_1}$ — поправочный множитель, постоянный для всех участков.

Заметим, что в рассматриваемом случае нет необходимости пользоваться измеренным уклоном свободной поверхности. Примем $k_1 \sqrt{I_{\text{общ}}} = k$. Запишем выражение для расхода Q следующим образом:

$$Q = k \sum_{i=1}^m \frac{H_i^{2/3}}{n_{\text{усл } i}} \Delta\omega_i.$$

Найдя сумму для всего сечения и зная расход Q , можно определить численное значение k :

$$k = \frac{Q}{\sum_{i=1}^m \frac{H_i^{2/3}}{n_{\text{усл } i}} \Delta\omega_i}.$$

Далее могут быть вычислены средние скорости на участках i по формуле

$$v_{\text{ср } i} = k \frac{H_i^{2/3}}{n_{\text{усл } i}} \quad (3.45)$$

и построены графики $v_{\text{ср}}(z)$, где z — координата, расположенная поперек реки и имеющая начало у одного из урезов.

Теперь рассмотрим случай, когда участок реки в плане имеет значительную, но постоянную или плавно изменяющуюся по длине кривизну продольной оси потока и урезом. Будем предполагать, что на участке не происходит ни расширения, ни сужения реки. Случай весьма значительной кривизны здесь не рассматривается, так как возникающие при этом интенсивные поперечные

течения оказывают большое влияние на распределение продольных скоростей и требуют учета при решении поставленной задачи. Простыми методами учет поперечных течений не осуществляется.

Получим сначала приближенное выражение для вычисления средней по вертикали продольной скорости на закруглении речного потока в профиле максимальной кривизны AC (рис. 3.6). Отступая от этого профиля на небольшие равные расстояния вниз и вверх по течению вдоль i -той линии тока, проведем два других профиля BC и DC , сходящиеся под углом $\Delta\alpha$ в центре кривизны закругления (все три

профиля совпадают с направлениями радиусов кривизны соответствующих участков русла). Линиями тока реки называют такие кривые, в каждой точке которых средний по вертикали вектор скорости является касательной. Расстояние между профилями BC и DC вдоль i -той линии тока обозначим через Δx_i . Приближенно примем, что падения свободной поверхности Δz от профиля BC до профиля DC равны для всех линий тока от левого берега до правого. Линии тока считаем параллельными берегам. Это условие позволяет получить для i -той линии

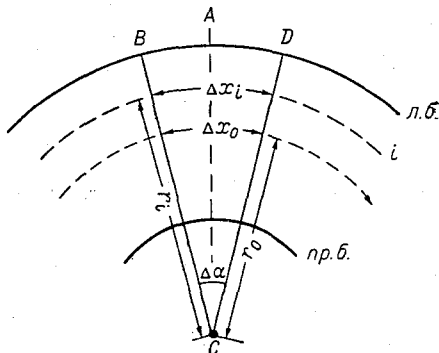


Рис. 3.6. Схема к выводу формулы для приближенного расчета распределения средней по вертикали скорости по ширине реки на закруглении.

тока приближенное выражение уклона I_i

$$I_i = \frac{\Delta z}{\Delta x_i} = \frac{\Delta z}{\Delta r_i}$$

(угол $\Delta\alpha$ измеряется в радианах), r_i — радиус кривизны i -той линии тока.

Для i -той вертикали средняя скорость определится из

$$v_{ср\ i} = \frac{H_i^{2/3}}{n_i} \left(\frac{\Delta z}{\Delta r_i} \right)^{1/2}.$$

Если известна средняя скорость на некоторой вертикали, которую обозначим индексом нуль (0), то скорость на i -той вертикали можно выразить так:

$$v_{ср\ i} = v_{ср\ 0} \left(\frac{H_i}{H_0} \right)^{2/3} \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^{1/2} \frac{n_0}{n_i}. \quad (3.46)$$

Рассмотренное решение является весьма приближенным; оно не учитывает всей сложности формы водной поверхности на закруглении потока.

ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ РУСЛОВОГО ПОТОКА

§ 1. Турбулентная пульсация. Схема переноса количества движения

Во вводной главе были выяснены основные черты турбулентного движения жидкости и отмечено, что главной его особенностью является пульсация скорости. С пульсацией связан и процесс турбулентного обмена, и сопротивление движению, которое, как указано, в турбулентном потоке пропорционально второй степени скорости.

Рассмотрим детально вопрос о пульсации скорости. Турбулентной пульсацией называется изменение скорости во времени

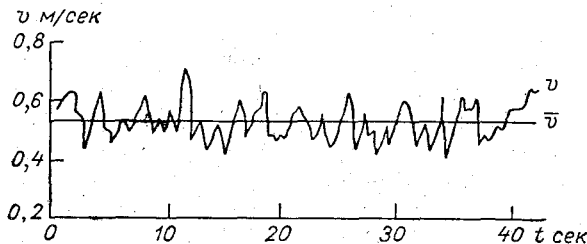


Рис. 4.1. Хронологический график пульсирующей скорости v . (Горизонтальная прямая на графике показывает осредненную скорость \bar{v}).

как по величине, так и по направлению. Скорость пульсирует в каждой точке потока.

Мгновенная скорость v может быть представлена в проекции на координатные оси x, y, z , причем ее компоненты будем обозначать через v_x, v_y и v_z . Каждая из этих проекций выражается суммой проекций осредненной скорости течения в точке v и пульсационного добавка v' , т. е.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + (\pm) v'_x; \\ v_y &= \bar{v}_y + (\pm) v'_y; \\ v_z &= \bar{v}_z + (\pm) v'_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Пульсационные добавки, или иначе — пульсационные скорости, v'_x, v'_y и v'_z принимают как положительные, так и отрицательные значения. Осреднение пульсационных скоростей за некоторый достаточно продолжительный промежуток времени, именуемый периодом осреднения, дает нуль. На рис. 4.1 изобра-

жена хронограмма продольной скорости потока, полученная по записи работы гидрометрической вертушки, снабженной однооборотным контактом. Пульсационная скорость v' отсчитывается вверх (+) и вниз (—) от средней линии, выражающей \bar{v} .

При осреднении одного из равенств формулы (4.1), например первого из них, будем иметь

$$\overline{v_x} = \overline{\overline{v_x}} + \overline{v'_x} = \overline{v_x} + 0. \quad (4.2)$$

Очевидно, что здесь

$$\overline{\overline{v_x}} = \overline{v_x} \quad \text{и} \quad \overline{v'_x} = 0.$$

Если направить ось x вдоль осредненного течения, то мгновенные скорости v_y и v_z окажутся равными соответствующим пульсационным скоростям. В этом случае будем иметь

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \overline{v_x} + v'_x; \\ v_y &= v'_y; \\ v_z &= v'_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Если меняющаяся во времени t (т. е. пульсирующая) скорость в какой-либо точке потока (или компонента этой скорости) выражается функцией $v(t)$, изображенной на рис. 4.1, то осредненная величина \bar{v} находится по формуле, называемой формулой осреднения,

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{1}{2}T}^{t + \frac{1}{2}T} v(t) dt, \quad (4.4)$$

где T — период осреднения.

В частности, в условиях установившегося движения продолжительность периода осреднения должна быть достаточной, чтобы обеспечить получение устойчивого значения величины \bar{v} , практически не зависящего от выбранного нижнего предела интегрирования, т. е. от начала отсчета времени на хронограмме скорости.

Чем больше период осреднения, тем точнее находится осредненная скорость потока \bar{v} . В практике гидрометрических и лабораторных измерений выбор периода осреднения основан на задании допустимой ошибки измеряемой величины \bar{v} . В гидрометрических руководствах имеются указания о назначении продолжительности выдержки измерителя скорости в точке, основанные также на указанном принципе.

Пульсация скорости в турбулентном потоке связана с добавочными движениями жидкости, накладывающимися на основное (осредненное) движение и обуславливающими турбулентный обмен внутри потока, приводящий к перемешиванию смежных слоев жидкости. В силу условия неразрывности турбулентный перенос жидкости в одном направлении компенсируется переносом в противоположном направлении. Таким образом, в результате турбулентного обмена не происходит результирующего переноса объемов воды из одной области потока в другую.

Рассмотрим схему турбулентного обмена смежных слоев потока жидкими объемами ΔW . Если через $\Delta W_{\text{в}}$ и $\Delta W_{\text{н}}$ обозначить объемы, поступающие через горизонтальную контрольную площадку соответственно сверху и снизу, то можно написать

$$\Delta W_{\text{в}} = \Delta W_{\text{н}} = \Delta W.$$

Это равенство вытекает из условия неразрывности. Несмотря на отсутствие результирующего переноса объемов жидкости, в турбулентном потоке происходит перенос тепла растворенных и взвешенных веществ и перенос количеств движения (mv). Последнее происходит в том случае, если в различных зонах потока скорости различны (например, имеет место различие скорости по глубине и по ширине потока). Таким образом, перенос количеств движения должен

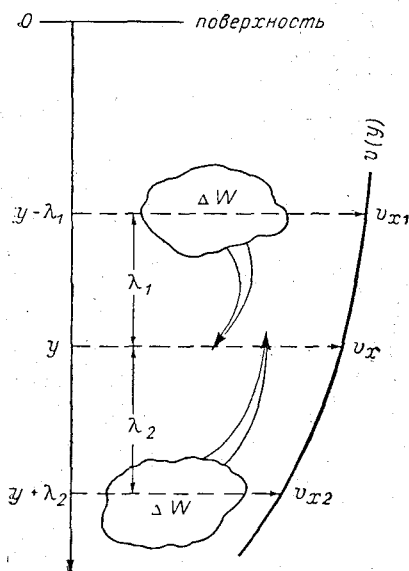


Рис. 4.2. Схема к выводу формулы переноса количеств движения.

иметь место во всех случаях реальных водных потоков, обладающих всегда различием скоростей течения по глубине и ширине.

Рассмотрим элементарный способ вывода выражения турбулентного переноса количеств движения. Обратимся к рис. 4.2. Обозначим через ΔR_{xy} проекцию на ось x количества движения, перенесенного в результате турбулентного обмена за время Δt через горизонтальную площадку $\Delta \omega$. Ось y является нормалью площадке $\Delta \omega$. Через λ_1 и λ_2 на рис. 4.2 обозначены положительные величины, выражающие расстояния по вертикали от точек, с которых в процессе турбулентного обмена приходят объемы воды соответственно сверху и снизу к площадке $\Delta \omega$. Пусть за время Δt сверху вниз (или соответственно снизу вверх) через площадку $\Delta \omega$ переносится объем ΔW . Масса, перемещающаяся

сверху вниз или снизу вверх в результате турбулентного обмена, будет равна

$$m = \frac{\gamma}{g} \Delta W. \quad (4.5)$$

Объем жидкости, перемещающийся сверху вниз, в момент пересечения площадки $\Delta\omega$ будет обладать продольной скоростью (в направлении оси x) осредненного движения v_{xa} , а объем, перемещающийся вверх, в момент пересечения площадки будет иметь продольную скорость осредненного движения, равную v_{xb} . Для упрощения записи знак осреднения скорости не пишем. Перенос количества движения в проекции на ось x за время Δt через площадку $\Delta\omega$ будет

$$\Delta R_{xy} = \frac{\gamma}{g} \Delta W v_{xa} - \frac{\gamma}{g} \Delta W v_{xb},$$

или

$$\Delta R_{xy} = \frac{\gamma}{g} \Delta W (v_{xa} - v_{xb}). \quad (4.6)$$

Скорости v_{xa} и v_{xb} могут быть связаны со скоростями v_{x1} и v_{x2} , имеющими место соответственно в точках 1 и 2 (рис. 4.2), следующими приближенными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} v_{xa} &= v_{x1} - \varepsilon; \\ v_{xb} &= v_{x2} + \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь ε — положительная величина, выражающая то приращение скорости, которое происходит на пути объема ΔW к площадке $\Delta\omega$ и обусловлено влиянием на объем ΔW окружающих его масс жидкости, имеющих выше контрольной площадки $\Delta\omega$ большую продольную скорость, а ниже площадки — меньшую. По-видимому, величину ε можно считать пропорциональной взятому с обратным знаком градиенту осредненной скорости $\frac{dv_x}{dy}$ и при этом за коэффициент пропорциональности принять некоторую линейную величину λ_0 , т. е.

$$\varepsilon = -\lambda_0 \frac{dv_x}{dy}. \quad (4.8)$$

Теперь запишем

$$\Delta R_{xy} = \frac{\gamma}{g} \Delta W (v_{x1} - v_{x2} - 2\varepsilon). \quad (4.9)$$

Выразим осредненные скорости в точках 1 и 2 через осредненную скорость в точке y , равную v_x

$$\left. \begin{aligned} v_{x1} &= v_x - \frac{dv_x}{dy} \lambda_1; \\ v_{x2} &= v_x + \frac{dv_x}{dy} \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Подставляя выражения (4.10) и (4.8) в равенство (4.9), получим

$$\Delta R_{xy} = - \frac{\gamma}{g} \Delta W \lambda_* \frac{dv_x}{dy}, \quad (4.11)$$

где

$$\lambda_* = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_0.$$

Всегда $\lambda_* > 0$; это обусловлено имеющим место неравенством $\lambda_1 + \lambda_2 \gg 2\lambda_0$. Записанные соотношения выражают то обстоятельство, что перемещающиеся в результате турбулентного обмена объемы жидкости в определенной мере сохраняют отпечаток свойств тех областей потока, откуда они приходят.

Осредним выражение (4.11) за промежуток времени, равный периоду осреднения,

$$\overline{\Delta R_{xy}} = - \frac{\gamma}{g} \overline{\Delta W \lambda_*} \frac{dv_x}{dy}. \quad (4.12)$$

Разделим это равенство на Δt и $\Delta \omega$ и найдем перенос количества движения в одну секунду через единицу площадки, обозначив его через $(q_r)_{xy}$.

$$(q_r)_{xy} = \frac{\overline{\Delta R_{xy}}}{\Delta t \Delta \omega} = - \frac{\gamma}{g} \frac{\overline{\Delta W}}{\Delta t \Delta \omega} \lambda_* \frac{dv_x}{dy}. \quad (4.13)$$

Абсолютную величину множителя, стоящего перед производной скорости по координате, обозначим через A , т. е. положим

$$A = \frac{\gamma}{g} \frac{\overline{\Delta W}}{\Delta t \Delta \omega} \lambda_*, \quad (4.14)$$

где A — коэффициент турбулентного обмена, или коэффициент виртуальной вязкости (подчеркнем, что эта величина всегда положительна). Теперь имеем

$$(q_r)_{xy} = -A \frac{dv_x}{dy}. \quad (4.15)$$

Перенос количества движения через некоторую воображаемую площадку внутри жидкости определяет величину касательного напряжения τ на этой площадке, т. е.

$$\tau_{xy} = - (q_r)_{xy}; \quad (4.16)$$

$$\tau_{xy} = A \frac{dv_x}{dy}. \quad (4.17)$$

Выражения (4.15) и (4.16) относятся в тому случаю, когда в направлении осей x и z не происходит изменения скоростей, т. е. $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$, и притом отсутствуют поперечные составляющие осредненной скорости ($v_z = v_y = 0$).

Для случая, когда эти величины не равны нулю, вывод оказывается более сложным. С ним мы ознакомимся ниже при более строгом рассмотрении вопроса о турбулентном переносе количеств движения.

§ 2. Турбулентный перенос тепла

Подобно тому как мы исследовали перенос количеств движения, может быть исследован перенос тепла и взвешенных в воде веществ. Рассмотрим вопрос о переносе тепла.

Температуру воды будем обозначать через θ , а удельную теплоемкость — через c . При решении задач о переносе тепла удобно пользоваться физической системой единиц, и поэтому будем считать, как обычно, удельную теплоемкость c отнесенной к единице массы жидкости. Обратимся к рис. 4.3, на котором изображена схема турбулентного переноса тепла. Обозначим через $\rho \Delta W$ массу жидкого объема, перемещающегося через контрольную горизонтальную площадку $\Delta \omega$ в процессе турбулентного перемешивания, ρ — плотность

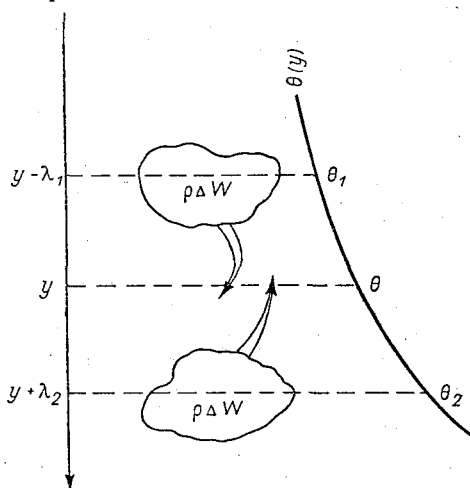


Рис. 4.3. Схема к выводу формулы переноса тепла.

воды. Через $c\rho\Delta\rho W$ выразится полная теплоемкость этого объема. Обозначим через θ_a и θ_b соответственно температуру верхнего и нижнего объемов в момент пересечения площадки $\Delta\omega$, находящейся на глубине y . Величины $c\rho\Delta W\theta_a$ и $c\rho\Delta W\theta_b$ будут при этом выражать запасы тепла соответственно в верхнем и нижнем объемах в момент пересечения ими контрольной площадки.

Примем теперь, как и при изучении переноса количеств движения, следующие приближенные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_a &= \theta_1 + \varepsilon_\theta; \\ \theta_b &= \theta_2 - \varepsilon_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

в которых

$$\varepsilon_{\theta} \cong \lambda_0 \frac{d\theta}{dy}. \quad (4.19)$$

В соответствии со схемой, изображенной на рис. 4.3, поток тепла должен быть отрицательным, так как направлен против положительного направления оси y (из области более высокой температуры в область более низкой). Поэтому перед величиной $\Delta\Theta_y$, выражающей перенос тепла через площадку $\Delta\omega$ за время Δt , будем ставить знак минус:

$$-\Delta\Theta_y = (\theta_2 - \theta_1 - 2\varepsilon_{\theta}) c\rho \Delta W. \quad (4.20)$$

Теперь выразим температуру в точках 1 и 2 через температуру на уровне контрольной площадки, т. е. в точке y

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta - \frac{d\theta}{dy} \lambda_1; \\ \theta_2 &= \theta + \frac{d\theta}{dy} \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Подставляя выражения (4.21) в формулу (4.20) и осредняя, получаем

$$\Delta\Theta_y = -c\rho \overline{\Delta W \lambda_*} \frac{d\theta}{dy}. \quad (4.22)$$

Турбулентный перенос тепла $(q_{\theta})_y$ в направлении оси y в единицу времени через единицу площадки будет равен

$$(q_{\theta})_y = \frac{\overline{\Delta\Theta_y}}{\Delta\omega \Delta t}; \quad (4.23)$$

$$(q_{\theta})_y = -c\rho \frac{\overline{\Delta W \lambda_*}}{\Delta\omega \Delta t} \frac{d\theta}{dy}. \quad (4.24)$$

Сравним полученное выражение с выражением (4.13). Видим, что эти выражения содержат один и тот же множитель. Введем в выражение (4.24) коэффициент турбулентного обмена A . Учитывая, что $\rho = \frac{Y}{g}$, записываем

$$(q_{\theta})_y = -cA \frac{d\theta}{dy}. \quad (4.25)$$

Здесь cA — коэффициент турбулентной теплопроводности, выражаемый в физической системе единиц. Если в формуле (4.25) использовать кинематический коэффициент турбулентного

обмена $\frac{A}{\rho}$, или $\frac{gA}{\gamma}$, что представляет большое удобство при расчетах, то формулу целесообразно записать таким образом:

$$(q_0)_y = -\rho c \frac{gA}{\gamma} \frac{d\theta}{dy}. \quad (4.26)$$

Заметим, что при использовании технической системы единиц и отнесении удельной теплоемкости c не к массе, а к весу жидкости коэффициент турбулентной теплопроводности приобретает иной вид: он будет выражаться произведением cgA . Вместе с тем единственный турбулентный перенос тепла определится равенством

$$(q_0)_y = -cgA \frac{d\theta}{dy}. \quad (4.27)$$

§ 3. Турбулентный перенос взвешенных и растворенных в воде веществ

Обозначим через s концентрацию взвешенного или растворенного в воде вещества. Концентрацию взвешенных в потоке веществ называют мутностью. Условимся выражать мутность в относительных объемных единицах, принимая ее за отношение находящегося во взвешенном состоянии объема твердого материала V_T к общему объему смеси V_{CM} воды с взвешенными частицами. Твердые частицы грунта, переносимые речными потоками и ручьями, в гидрологии называют наносами.

$$s = \frac{V_{TB} M^3}{V_{CM} M^3}.$$

В таком выражении s является величиной безразмерной. В практической гидрологии s обычно выражают через отношение весового количества наносов к объему смеси воды с наносами; в этом случае размерность s будет: $г/м^3$, $мг/л$, $кг/м^3$, $т^*/м^3$ и т. д. (здесь $л$ — литр, $т^*$ — тонна, как единица веса).

Если во взвешенном состоянии в потоке переносятся более тяжелые частицы, чем вода, т. е. если их удельный вес γ_s больше удельного веса воды γ , то внутри водных масс эти частицы будут перемещаться под действием силы тяжести вниз с некоторой относительной скоростью u . В процессе такого перемещения (опускания) частица переходит из одного пульсационного индивидуума (вихревого образования) турбулентного потока в другой, причем этот переход сопровождается изменением не только абсолютной, но и относительной скорости частицы в воде.

Изменение относительной скорости обуславливается действием инерционных сил на взвешенную частицу: чем больше масса частицы, тем больше могут проявляться эти силы.

Частицы наносов, переносимые во взвешенном состоянии равнинными реками, очень малы, размеры их измеряются микронами, долями миллиметра и иногда миллиметрами, частицы размером более 0,5 мм обычно относят уже к крупным взвешенным наносам. Естественно, что инерционными силами при рассмотрении движения таких частиц пренебрегают, хотя в особых случаях инерция должна учитываться.

Пренебрежение инерцией позволяет приравнять относительную скорость частицы внутри турбулентного потока величине скорости ее опускания в неподвижной воде. Эту скорость называют гидравлической крупностью и рассматривают как стабильную характеристику частицы заданного размера и удельного веса в воде. В последние годы обращено особое внимание на форму частиц. В ряде случаев ее учитывают при определении гидравлической крупности, которую принято обозначать через u и выражать в м/сек или в некоторых случаях в см/сек.

При выводе уравнения турбулентного переноса взвешенных в потоке частиц (наносов) поступают таким же образом, как и при выводе уравнения переноса тепла, но вводят добавочный член для учета относительного перемещения частиц со скоростью u внутри пульсационных объемов.

Рассматривая перенос наносов в турбулентном потоке через контрольную площадку $\Delta\omega$ за время Δt , замечаем, что этот перенос можно разделить на две составляющие: $\overline{\Delta\varphi_y^T}$ и $\overline{\Delta\varphi_y^u}$, первая из которых выражает средний турбулентный перенос частиц, а вторая — средний перенос частиц в результате их опускания со скоростью u внутри пульсационных объемов. Если мутность потока измерять в относительных объемных единицах, то величины переноса наносов окажутся выраженными через суммарный объем перенесенных через площадку $\Delta\omega$ твердых частиц. В итоге получаем следующую алгебраическую сумму:

$$\overline{\Delta\varphi_y} = \overline{\Delta\varphi_y^T} + \overline{\Delta\varphi_y^u}. \quad (4.28)$$

За счет турбулентного перемешивания осуществляется перенос наносов снизу вверх из зоны большей концентрации в зону меньшей концентрации; за счет относительной скорости u наносы опускаются. Таким образом, слагаемые правой части уравнения (4.28) должны иметь разные знаки.

Используя рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, получаем

$$\overline{\Delta\varphi_y^T} = -\overline{\Delta W \lambda_*} \frac{ds}{dy}. \quad (4.29)$$

Теперь напишем выражение второго слагаемого, т. е. величины $\overline{\Delta\varphi_y^u}$. Если бы вся жидкость, расположенная над площад-

кой $\Delta\omega$, перемещалась вниз со скоростью u , то за время Δt через площадку переместился бы объем жидкости, равный произведению $\Delta\omega\Delta t u$. Однако перемещается не весь объем, а только его твердый компонент, т. е. наносы. В 1 м^3 объема смеси воды с наносами содержится $s \text{ м}^3$ наносов, поэтому

$$\overline{\Delta\varphi_y^a} = \Delta\omega u \Delta t s. \quad (4.30)$$

Значение мутности s для каждой точки потока предполагается осредненным во времени.

Подставляя равенства (4.29) и (4.30) в формулу (4.28) и деля получающееся уравнение на $\Delta\omega\Delta t$, находим

$$(q_s)_y = \frac{\overline{\Delta\varphi_y}}{\Delta\omega\Delta t} = - \frac{\overline{\Delta W}}{\Delta\omega\Delta t} \lambda_* \frac{ds}{dy} + us. \quad (4.31)$$

Здесь $(q_s)_y$ выражает перенос в турбулентном потоке взвешенного вещества (наносов) через единицу горизонтальной площадки в единицу времени (т. е. единичный перенос вещества в направлении оси y).

Вводя коэффициент турбулентного обмена A , получаем следующую формулу:

$$(q_s)_y = - \frac{g}{\gamma} A \frac{ds}{dy} + us, \quad (4.32)$$

где $\frac{g}{\gamma} A$ — коэффициент турбулентной диффузии.

Если исследуется распространение в турбулентном потоке не взвешенных частиц, а раствора, близкого по плотности к воде, то принимают $u=0$. Для этого случая выражение единичного переноса вещества приобретает вид

$$(q_s)_y = - \frac{g}{\gamma} A \frac{ds}{dy}. \quad (4.33)$$

§ 4. Вывод формул касательного напряжения при уточненном представлении о пульсации

В. М. Маккавеев показал, что величина каждой составляющей пульсационных добавок скорости v'_x , v'_y и v'_z может быть представлена как сумма двух компонентов, а именно: компонента «чистой пульсации» (обозначаем соответственно v''_x , v''_y и v''_z), характеризующего ту пульсацию, которая не зависит от неоднородности поля осредненных скоростей, и другого компонента (обозначаем v'''_x , v'''_y и v'''_z), учитывающего эту

неоднородность. При наличии неоднородности поля в направлении всех трех координатных осей x , y и z (располагаемых произвольно) последний компонент может быть представлен трехчленом, записываемым, например, для составляющей v_x''' следующим образом:

$$v_x''' = k_x''' \frac{\partial v_x}{\partial x} + k_x''' \frac{\partial v_x}{\partial y} + k_z''' \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (4.34)$$

Здесь v_x , v_y и v_z — осредненные значения составляющих скорости.

Значения коэффициентов k''' зависят от компонента чистой пульсации и выражаются соотношениями:

$$k_x''' = -(\tau v_x'' + \lambda_x''); \quad k_y''' = -(\tau v_y'' + \lambda_y'') \text{ и т. д.,}$$

где τ — некоторый промежуток времени, пропорциональный «периоду» пульсации. Заметим, что, несмотря на то что пульсация турбулентного потока имеет случайный характер, в теории часто пользуются понятием «период пульсации», под которым подразумевают средний интервал между двумя последовательными максимумами или минимумами на хронограмме скоростей. Величина τ , по-видимому, может быть принята одной и той же для всех координатных направлений. В приведенных выражениях λ_x'' , λ_y'' и λ_z'' — некоторые поправочные слагаемые, учитывающие состояние пульсационного индивидуума к началу отсчета времени τ .

Для двух взаимно перпендикулярных направлений, например x и y , могут быть записаны следующие выражения полной пульсационной скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_x' &= v_x'' - (\tau v_x'' + \lambda_x'') \frac{\partial v_x}{\partial x} - (\tau v_y'' + \lambda_y'') \frac{\partial v_x}{\partial y} - \\ &\quad - (\tau v_z'' + \lambda_z'') \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ v_y' &= v_y'' - (\tau v_x'' + \lambda_x'') \frac{\partial v_y}{\partial x} - (\tau v_y'' + \lambda_y'') \frac{\partial v_y}{\partial y} - \\ &\quad - (\tau v_z'' + \lambda_z'') \frac{\partial v_y}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

В. М. Маккавеев использует эти соотношения при выводе выражений касательных и нормальных напряжений, возникающих в турбулентном потоке; при этом одновременно дается зависимость для коэффициента турбулентного обмена.

Рассмотрим этот вывод. Касательное напряжение, действующее внутри турбулентного потока, может быть выражено формулой Рейнольдса, которую иногда называют формулой Лоренца;

например, для проекции на ось x касательного напряжения, действующего на площадке, имеющей внешнюю нормаль y (обозначаем τ_{xy}), эта формула имеет вид

$$\tau_{xy} = - \frac{\gamma}{g} \overline{v'_x v'_y}. \quad (4.36)$$

Вывод формулы Рейнольдса—Лоренца рассматривается в последнем параграфе настоящей главы.

Если уравнения (4.35) почленно перемножить и выполнить операцию осреднения, то для $\overline{v'_x v'_y}$ получим выражение, содержащее в виде слагаемых ряд величин, причем некоторые из них допустимо принять равными нулю.

Так, ввиду взаимной независимости величин v''_x , v''_y и v''_z принимаются равными нулю осредненные значения членов следующего вида:

$$\begin{aligned} \overline{v''_x v''_y} &= \overline{v''_y v''_z} = \overline{v''_z v''_x} = 0; \\ \overline{\tau^2 v''_x v''_y} &= \overline{\tau^2 v''_y v''_z} = \overline{\tau^2 v''_z v''_x} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения предполагаются и для осредненных произведений, включающих λ'' , поскольку величины λ'' , v и τ с разными индексами считаются взаимно независимыми.

Далее отбрасываются, как величины весьма малые, члены, содержащие произведения двух производных от осредненных скоростей по координатам и, кроме того, принимается следующее приближенное равенство:

$$\overline{(v''_x)^2} \cong \overline{(v''_y)^2} \cong \overline{(v''_z)^2} = u_0^2,$$

в котором через u_0^2 обозначено осредненное значение каждого из компонентов пульсационной скорости. Эта величина является одним из параметров, характеризующих турбулентность потока.

Наконец, также приближенно может быть принято взаимное равенство средних значений следующих произведений, обозначаемых через $\frac{g}{\gamma} A$:

$$\overline{\tau (v''_x)^2} \cong \overline{\tau (v''_y)^2} \cong \overline{\tau (v''_z)^2} = \frac{g}{\gamma} A, \quad (4.37)$$

где A , как и выше, — коэффициент турбулентного обмена.

Упомянутые операции и отбрасывание указанных величин позволяют найти выражение члена, стоящего в правой части формулы (4.36), и после преобразований получить

$$\tau_{xy} = A \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \quad (4.38)$$

Аналогичным образом выводятся формулы и для других составляющих касательного напряжения. Эти формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zy} &= A \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= A \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.38')$$

и

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}. \quad (4.38'')$$

Полученные Маккавеевым на основании вышеприведенных рассуждений выражения (4.38) имеют вид формул Навье—Стокса для касательного напряжения при ламинарном течении, отличаясь от них коэффициентом вязкости. Эти формулы являются более общими, чем одночленная зависимость касательного напряжения, предложенная для ламинарного потока Ньютоном и имеющая вид формулы (4.15).

Коэффициент турбулентного обмена может быть найден непосредственно из соотношения (4.37)

$$A = -\frac{\gamma}{g} \overline{\tau (v_x')^2}. \quad (4.39)$$

Составляющие касательных напряжений, взятые с обратным знаком, эквивалентны соответствующим величинам среднего секундного переноса количества движения через единицу поверхности площадки, соответствующим образом ориентированной в потоке. Если, например, $(q_r)_{xy}$ — средний секунднй перенос (в проекции на ось x) количества движения через площадку, имеющую нормалью ось y , то будем иметь $(q_r)_{xy} = -\tau_{xy}$; $(q_r)_{xz} = -\tau_{xz}$ и т. д. Например, выражение $(q_r)_{xy}$ будет выглядеть так:

$$(q_r)_{xy} = -A \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \quad (4.40)$$

Полученные здесь формулы относятся к общему случаю турбулентного потока. Именно поэтому формула (4.40) отличается от одночленной зависимости (4.15), выведенной в § 1 настоящей главы, где вывод сделан для частного случая движения, когда поток направлен по оси x и поперечные составляющие скорости v_y и v_z равны нулю. Подстановка отвечающих этому случаю равенств

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$$

в формулы (4.38) приводит к получению одночленных зависимостей; в частности, формула (4.40) становится тождественной формуле (4.15).

§ 5. Формула коэффициента турбулентного обмена

Выделим в потоке объем жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания, равными единице, и высотой, равной y . Основание параллелепипеда параллельно свободной поверхности потока (рис. 4.4).

При равномерном установившемся движении, характеризующемся отсутствием инерционных сил, действующая на выделенный объем активная сила — проекция силы тяжести на направление движения — уравнивается касательной силой сопротивления, приложенной к основанию параллелепипеда. Поскольку

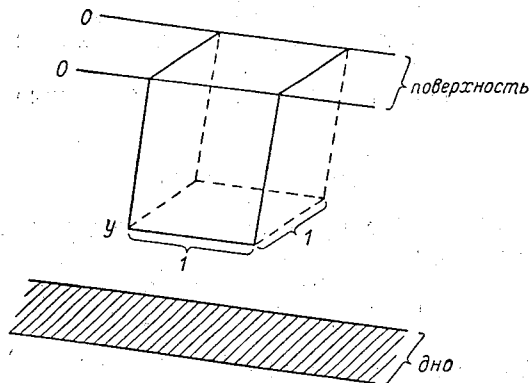


Рис. 4.4.

площадь основания равна единице, сила сопротивления оказывается равной касательному напряжению

$$\tau_{xy} = A \frac{dv}{dy},$$

действующему на основание параллелепипеда и направленному в сторону, противоположную движению.

Активная сила, действующая в направлении движения, равна произведению удельного веса жидкости γ на объем параллелепипеда $1 \cdot 1 \cdot y$ и на уклон I свободной поверхности.

Равновесие действующих сил выразится таким образом:

$$\gamma I y + A \frac{dv}{dy} = 0;$$

отсюда находим

$$A = - \frac{\gamma I y}{\frac{dv}{dy}}. \quad (4.41)$$

Эта формула позволяет вычислять коэффициент турбулентного обмена A по данным измерений уклона и распределения скоростей в потоке.

Распределение скорости по вертикали речного потока может быть приближенно выражено какой-либо эмпирической зависимостью. Возьмем, например, часто применяемую в гидрологии параболу Базена, имеющую следующий вид:

$$v = v_0 - \frac{mv_{cp}}{CH^2} y^2;$$

ось y направлена вниз и имеет начало у свободной поверхности, к которой она перпендикулярна, v_{cp} — средняя скорость по вертикали, v_0 — скорость у поверхности, C — коэффициент Шези, H — глубина потока, m — коэффициент, численное значение которого Базен принимал равным 24, а Буссинек полагал $m=22,3$. Ниже отмечается, что коэффициент m не является постоянным, а изменяется в зависимости от C .

По формуле Базена определяем производную скорости по вертикали

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{2mv_{cp}}{CH^2} y.$$

Подставляя значение производной в выражение коэффициента A , записываем

$$A = \frac{\gamma I y C H^2}{2m v_{cp} y} = \frac{\gamma H I C}{2m v_{cp}}. \quad (4.42)$$

Воспользуемся теперь формулой Шези и вспомним, что эта формула может быть представлена так:

$$H I = \frac{v_{cp}^2}{C^2}.$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (4.42), находим

$$A = \frac{\gamma H v_{cp}}{2m C}. \quad (4.43)$$

Таким образом, получена известная формула В. М. Маккавеева, выведенная им в 1931 г.; она может использоваться для практических расчетов и обычно дает достаточно удовлетворительный результат. Уточненное выражение коэффициента турбулентного обмена будет рассмотрено в главе V.

§ 6. Дифференциальные уравнения движения турбулентного потока. Дифференциальные уравнения ламинарного течения

Общие дифференциальные уравнения турбулентного движения жидкости, содержащие виртуальный коэффициент, были выведены В. М. Маккавеевым в 1931 г.

Для понимания уравнений необходимо рассмотреть их вывод. В целях упрощения этой задачи ограничимся, во-первых, рас-

смотрением вывода одного лишь из этих уравнений — уравнения в проекции на ось x , а во-вторых, наложим некоторые ограничения на характер потока. Принимаем, что ось x , принадлежащая прямоугольной системе координат, совпадает с направлением осредненного течения потока, который предполагается прямолинейным. Последнее приводит к равенству нулю поперечных составляющих осредненной скорости течения и их производных по всем координатным направлениям, т. е.

$$v_y = v_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \dots = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Далее, будем полагать, что характер течения и, в частности, величина скорости v_x не изменяется поперек потока (вдоль поперечной оси z), т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0.$$

Рассмотренный характер течения обычно именуют плоским течением, а поток, отличающийся таким течением, плоским потоком.

Предположим, что скорость течения изменяется по вертикальной координате y , т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0,$$

а также по длине потока и во времени

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \neq 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \neq 0.$$

Последнее позволяет определить течение как неравномерное и неустановившееся.

Выделим в рассматриваемом потоке элементарный объем жидкости δV , имеющий форму параллелепипеда со сторонами dx , dy и dz , параллельными координатным осям (рис. 4.5).

Объем параллелепипеда будет выражаться произведением его сторон dx , dy , dz , а масса δm заключенной в нем жидкости определяется равенством

$$\delta m = \frac{\gamma}{g} dx dy dz.$$

Проекцию на ось x ускорения массовой силы, приложенной к центру тяжести параллелепипеда M , обозначим через X . За время Δt центр тяжести параллелепипеда переместится на

расстояние Δx и займет положение M_1 . Считая, что на коротком расстоянии Δx скорость v_x меняется мало, записываем

$$\Delta x \cong v_x \Delta t,$$

где v_x — осредненная во времени скорость в точке M , т. е. в центре тяжести выделенного объема в момент его начального положения. Ввиду малости перемещения Δx будем определять силы, действующие на выделенный параллелепипед, также для начального его положения.

Составим теперь уравнение количества движения для рассматриваемого параллелепипеда в проекции на ось x . К параллелепипеду приложены массовая сила и силы гидродинамического

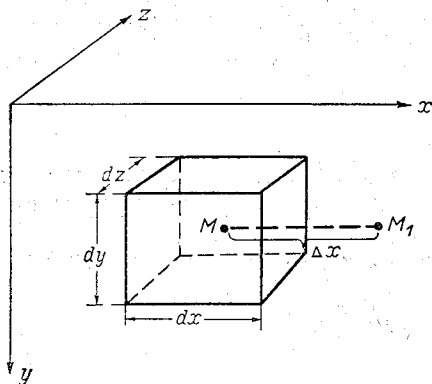


Рис. 4.5.

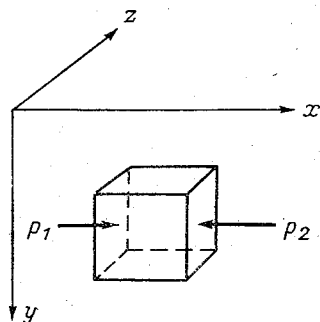


Рис. 4.6.

давления. Проекцию на ось x импульса равнодействующей этих двух сил обозначим через $F_x \Delta t$. Кроме того, имеет место турбулентный перенос количества движения через грани параллелепипеда. Проекцию на ось x этого переноса обозначим через ΔR_x . В результате действия сил, приложенных к параллелепипеду, и переноса через его грани количества движения происходит изменение количества движения массы параллелепипеда, которое в проекции на ось x выражается величиной $\delta m \Delta v_x$.

Таким образом, уравнение количества движения в проекции на ось x для массы δm записывается так:

$$\delta m \frac{dv_x}{dt} \Delta t = F_x \Delta t + \Delta R_x; \quad (4.44)$$

здесь учтено, что

$$\delta m \Delta v_x = \delta m \frac{dv_x}{dt} \Delta t.$$

Проекция на ось x импульса действующих сил определяется равенством

$$F_x \Delta t = (p_1 dy dz - p_2 dy dz) \Delta t + X \delta m \Delta t, \quad (4.45)$$

в котором p_1 и p_2 — соответственно величины гидродинамического давления в центрах тяжести граней 1 и 2 (рис. 4.6); $X \delta m \Delta t$ — проекция импульса массовой силы; $(p_1 dy dz - p_2 dy dz) \Delta t$ — проекция на ось x импульса равнодействующей сил гидродинамического давления.

Учитывая изменение давления в направлении оси x , выразим величины p_1 и p_2 через давление p в центре тяжести параллелепипеда M и найдем для их разности следующее соотношение:

$$p_1 - p_2 = p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} - p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} = - \frac{\partial p}{\partial x} dx. \quad (4.46)$$

Подставляя полученное значение разности $p_1 - p_2$ в формулу (4.45) и учитывая, что

$$dx dy dz = \frac{g}{\gamma} \delta m,$$

записываем

$$F_x \Delta t = - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \delta m \Delta t + X \delta m \Delta t. \quad (4.47)$$

Переходим к определению переноса количеств движения через грани параллелепипеда. Выше были даны формулы переноса количеств движения, содержащие производные проекций скорости по нормальям и площадкам, через которые осуществляется перенос количеств движения. Вспоминая ограничения, принятые в настоящем параграфе в отношении потока, отметим, что составляющие скорости по осям y и z (т. е. величины v_y и v_z) приняты равными нулю, а из частных производных продольной скорости v_x по координатным направлениям от нуля отличаются только две: $\frac{dv_x}{dy}$ и $\frac{dv_x}{dx}$. В условиях речного потока или любого другого плавно изменяющегося руслового потока первая из этих двух производных всегда много больше второй, т. е.

$$\frac{dv_x}{dy} \gg \frac{dv_x}{dx}.$$

Будем относить наше решение именно к этому случаю.

Таким образом, заслуживающий учета перенос количеств движения будет происходить лишь через верхнюю и нижнюю грани, которые перпендикулярны оси y . Единичный перенос количеств движения в рассматриваемом случае выразится следующей зависимостью:

$$(q_r)_{xy} = - A \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (4.48)$$

Единичные расходы количеств движения через верхнюю и нижнюю грани обозначим соответственно q_{rv} и q_{rh} .

Заметим, что $(q_r)_{xy}$ изменяется в направлении оси y в связи с изменением коэффициента турбулентного обмена A и производной $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Это изменение можно учесть, введя в уравнение частную производную $\frac{\partial (q_r)_{xy}}{\partial y}$. Значение $q_{rв}$ и $q_{rн}$ можно выразить через $(q_r)_{xy}$ в центре тяжести параллелепипеда M и приращение $(q_r)_{xy}$ в направлении соответствующей координатной оси, т. е.

$$\left. \begin{aligned} q_{rв} &= (q_r)_{xy} - \frac{\partial (q_r)_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}; \\ q_{rн} &= (q_r)_{xy} + \frac{\partial (q_r)_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

В формулах (4.49) через частную производную $(q_r)_{xy}$ по y , умноженную на половину дифференциала dy , выражена величина приращения единичного переноса количеств движения на отрезке оси y между точкой M и гранью параллелепипеда.

Теперь найдем поступление количеств движения ΔR_x через грани внутрь параллелепипеда за время Δt в проекции на ось x . Перенос, осуществляющийся через верхнюю грань (в направлении оси y), будем прибавлять, а через нижнюю грань — вычитать. В соответствии с этим записываем

$$\Delta R_x = (q_{rв} - q_{rн}) dx dz \Delta t. \quad (4.50)$$

После введения сюда величин $q_{rв}$ и $q_{rн}$, согласно уравнениям (4.49), и приведения подобных будем иметь

$$\Delta R_x = - \frac{\partial (q_r)_{xy}}{\partial y} dx dy dz \Delta t.$$

Вводя в полученное равенство величину $(q_r)_{xy}$ по формуле (4.48), находим

$$\Delta R_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{g}{\gamma} \delta m \Delta t. \quad (4.51)$$

Возвращаясь теперь к уравнению (4.44), подставляем в него значения $F_x \Delta t$ и ΔR_x соответственно по формулам (4.47) и (4.51) и после сокращения на $\delta m \Delta t$ получаем искомое уравнение

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (4.52)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, ограниченном условиями, сформулированными в начале раздела, полная

производная скорости v_x по времени, содержащаяся в уравнении (4.52), определится по формуле

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (4.53)$$

Если не ставить тех ограничений, которые были сделаны в отношении характера рассматриваемого в настоящем параграфе турбулентного потока, т. е. полагать, что течение имеет пространственный характер, поперечные составляющие скорости v_y и v_z , а также их производные по соответствующим координатам не равны нулю, то при выводе уравнения движения необходимо использовать двухчленные выражения единичного переноса количеств движения (или соответственные касательных напряжений), т. е. формулы (4.38), приведенные в § 4 настоящей главы.

В результате вывода, оказывающегося при этом гораздо более сложным, чем рассмотренный выше, приходим к следующей системе общих дифференциальных уравнений движения турбулентного потока:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right]; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right]; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (4.54)$$

Полные производные составляющих скорости по времени, как уже было показано в § 5 главы 1, выражаются равенствами:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Эти общие дифференциальные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости выведены советским ученым В. М. Маккавеевым в 1931 г. и дополнительно им обоснованы

в последующие годы. В литературе они часто именуются уравнениями Маккавеева.

Если для рассматриваемого в том или ином случае потока оказывается допустимым принять $A = \text{const}$, то уравнения (4.54) приводятся к следующему виду, совпадающему с уравнениями, которые были составлены ранее Буссинеском на основании формальных соображений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} A \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g}{\gamma} A \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right]; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{\gamma} A \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} (4.55)$$

Уравнения Маккавеева имеют очень много практических приложений, они являются в то же время наиболее общими выражениями закономерностей движения турбулентного потока. Широко используемые в гидравлике уравнения равномерного и неравномерного движения могут быть непосредственно получены из этих общих уравнений.

Уравнения движения ламинарного потока имеют вид, подобный уравнениям турбулентного движения, но вместо коэффициента виртуальной вязкости содержат коэффициент физической вязкости воды μ . Эти уравнения выведены в первой половине XIX в. Навье и Стоксом и записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g}{\gamma} \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right]; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{\gamma} \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \right\} (4.56)$$

где

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \text{ и т. д.}$$

Вспомним общие уравнения движения жидкости (1.37), в которых проекции ускорения сил сопротивления были представлены формальной записью: gf_x, gf_y, gf_z .

Сравнение уравнения (1.37) с уравнениями турбулентного (4.54) и ламинарного (4.56) движения позволяет выяснить содержание величин gf_x, gf_y и gf_z . Для турбулентного движения проекция на ось x ускорения сил сопротивления записывается в виде

$$gf_x = -\frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right]. (4.57)$$

Для ламинарного движения соответственно будем иметь

$$gf_x = -\frac{g}{\gamma} \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]. \quad (4.58)$$

Для проекций на оси y и z получим аналогичные формулы, которые будут отличаться лишь содержащимися в них проекциями скорости.

§ 7. Уравнения турбулентной диффузии и турбулентной теплопроводности

Выделим в турбулентном потоке параллелепипед объемом $dV = dx dy dz$, стороны которого параллельны соответствующим координатным осям x , y и z прямоугольной системы (рис. 4.7).

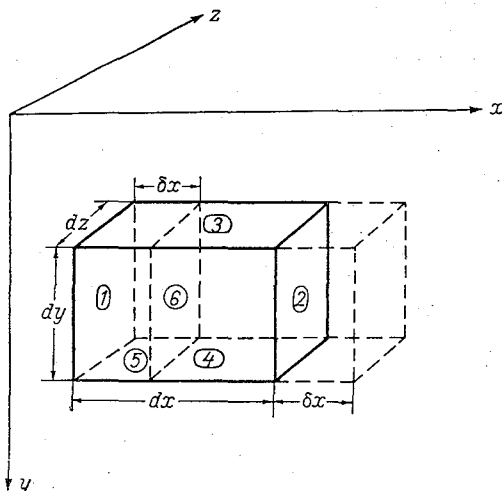


Рис. 4.7. Контрольный параллелепипед и его перемещение δx (к выводу уравнения турбулентного движения).

Пусть ось x располагается в направлении осредненного движения.

За весьма короткий интервал времени δt центр тяжести параллелепипеда, а вместе с тем и его грани 1 и 2 ($dy dz$) сместятся в направлении оси x на весьма малую величину δx .

Принимаем, что движение жидкости является равномерным и установившимся. Установившимся также является поле концентрации вещества, содержащегося в потоке. Примем далее, что концентрация вещества в направлении поперечной оси z

остаётся неизменной. Указанные ограничения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

Принятое расположение координатных осей относительно направления течения приводит к равенству нулю осредненных значений поперечных составляющих скорости

$$v_y = v_z = 0.$$

Составим баланс взвешенного в воде вещества (наносов), что будет отвечать более общему случаю по сравнению с балансом растворенного вещества. Уравнение баланса растворенного вещества может быть при этом получено из общего уравнения, если принять гидравлическую крупность находящихся в воде частиц равной нулю.

Помечаем номерами 1—6 грани параллелепипеда, как это показано на рис. 4.7. Обозначаем секундные расходы вещества за счет турбулентного обмена и осаждения частиц через соответствующие грани символами: $Q_{s1}, Q_{s2}, \dots, Q_{s6}$. Если, как и прежде, обозначить через q_s секундный перенос вещества через единицу поверхности, то можно написать:

$$\left. \begin{aligned} Q_{s1} &= q_{s1} dz dy; \\ Q_{s2} &= q_{s2} dz dy; \\ \dots &\dots \dots \dots \\ Q_{s6} &= q_{s6} dy dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

Как было показано выше, единичные расходы q_s определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q_{s1} &= -\frac{g}{\gamma} A_1 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_1; \\ q_{s2} &= -\frac{g}{\gamma} A_2 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_2; \\ q_{s3} &= -\frac{g}{\gamma} A_3 \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_3 + u s_3; \\ q_{s4} &= -\frac{g}{\gamma} A_4 \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_4 + u s_4; \\ q_{s5} &= -\frac{g}{\gamma} A_5 \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)_5 = 0; \\ q_{s6} &= -\frac{g}{\gamma} A_6 \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)_6 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

где индексами «1—6» помечены соответствующие грани. Равенство нулю двух последних величин определяется принятым исходным предположением о постоянстве концентрации по ширине потока (т. е. по оси z). Через u обозначена гидравлическая крупность частиц, принимаемая постоянной.

Составим уравнение баланса взвешенного вещества для контрольного объема dV

$$dV \frac{ds}{dt} \delta t = (Q_{s1} - Q_{s2} + Q_{s3} - Q_{s4}) \delta t. \quad (4.61)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, отвечающем принятым ограничениям, будет иметь место равенство

$$\frac{ds}{dt} = v_x \frac{ds}{dx}, \quad (4.62)$$

где v_x — продольная осредненная скорость.

Подставляя в уравнение (4.61) значения величин по соотношениям (4.60) и (4.62), получаем

$$v_x \frac{\partial s}{\partial x} dx dy dz = \frac{g}{\gamma} \left[-A_1 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 + A_2 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 \right] dz dy + \\ + \frac{g}{\gamma} \left[-A_3 \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_3 + A_4 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_4 \right] dz dx + u (s_3 - s_4) dz dx. \quad (4.63)$$

Принятое выше предположение об относительной малости перемещения параллелепипеда позволяет не учитывать изменений величин $A \frac{\partial s}{\partial x}$ и $A \frac{\partial s}{\partial y}$, обусловленных этим перемещением, и выразить разности, содержащиеся в квадратных скобках в правой части уравнения (4.63), следующим образом:

$$A_2 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 - A_1 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx, \quad (4.64)$$

$$A_4 \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_4 - A_3 \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_3 = \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial s}{\partial y} \right) dy. \quad (4.65)$$

Далее можно записать

$$s_4 - s_3 = \frac{\partial s}{\partial y} dy. \quad (4.66)$$

Подставляя равенства (4.64)—(4.66) в уравнение (4.63) и сокращая его на $dx dy dz$, приходим к следующему окончательному виду уравнения турбулентной диффузии, отвечающему рассматриваемому случаю:

$$v_x \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{g}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{g}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial s}{\partial y} \right) - u \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (4.67)$$

Аналогичным образом можно получить и общее уравнение турбулентной диффузии, имеющее вид

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right] - u \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (4.68)$$

Для растворенных веществ, гидравлическая крупность которых принимается равной нулю (т. е. $u=0$), уравнение (4.68) записывается без последнего члена. Если при этом принять $A = \text{const}$, то будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{\gamma} A \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right]. \quad (4.69)$$

В этих уравнениях полная производная концентрации по времени определяется равенством

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Общее дифференциальное уравнение турбулентной теплопроводности имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right], \quad (4.70)$$

где

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z};$$

здесь θ — температура, остальные обозначения прежние.

Дифференциальные уравнения турбулентной диффузии и турбулентной теплопроводности, полученные также В. М. Маккавевым, имеют очень большое теоретическое и практическое значение. Они используются для решения многих задач гидравлики, особенно речной гидравлики. Весьма часто при решении таких задач приходится прибегать к упрощениям; одним из них является условие $A = \text{const}$. В этом случае уравнение турбулентной теплопроводности приобретает вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{\gamma} A \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right]. \quad (4.71)$$

Дальнейшие упрощения основаны на пренебрежении отдельными членами уравнения при учете характера потока и особенностей рассматриваемой задачи.

§ 8. Граничные условия турбулентных потоков

При решении различных задач динамики турбулентных потоков, при расчете турбулентной диффузии и теплопроводности путем использования основных уравнений, которые были рассмотрены выше, необходимо принять определенные граничные условия.

Несмотря на все многообразие граничных условий в многочисленных конкретных случаях их удается свести к следующим основным формам: 1) заданию величин скорости, концентрации или температуры на граничной поверхности, т. е. к заданию самих функций; 2) заданию единичного расхода количества движения, вещества или тепла через граничную поверхность, что осуществляется введением производных рассматриваемых функций с соответствующими множителями на граничной поверхности; 3) заданию закона передачи количества движения, вещества или тепла через граничную поверхность и вместе с тем значений скорости, концентрации и температуры для внешней зоны рассматриваемого потока. Заметим при этом, что в ряде задач пограничный слой потока играет роль упомянутой внешней зоны по отношению к основной части турбулентного потока.

В некоторых теориях турбулентности, например в теории Л. Прандтля, принималось, что турбулентный поток имеет весьма тонкий ламинарный пограничный слой. Новейшие исследования изменили представление о характере пограничного придонного слоя потока, в котором обнаружена пульсация скоростей. В этом слое зарождаются вихревые турбулентные образования, распространяющиеся на всю толщу потока, где они получают наиболее полное развитие. Из сказанного следует, что пограничный слой, имеющийся у дна и стенок в турбулентном потоке, характеризуется не отсутствием турбулентности, а пониженной турбулентностью.

Рассмотрим несколько примеров способа задания граничных условий. Если при расчете распределения осредненных скоростей в плоском потоке (в вертикальной плоскости xOy) использовать выражение единичного расхода турбулентного переноса количества движения, то для получения граничных условий на свободной поверхности потока следует принять условие отсутствия переноса:

$$(q_r)_{y,0} = 0, \quad (4.72)$$

где y — вертикальная ось, направленная сверху вниз.

Пользуясь выражением для величины $(q_r)_y$, которое для указанного случая запишется без второго члена, находим

$$A_0 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_0 = 0, \quad (4.73)$$

что при очевидном условии $A_0 \neq 0$ дает для свободной поверхности

$$\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_0 = 0. \quad (4.74)$$

Величины, относящиеся к свободной поверхности, даны с индексом нуль (0).

Для того же потока граничные условия у дна будут выражаться соотношением

$$-A_H \left(\frac{dv_x}{dy}\right)_H = (q_r)_{y,H},$$

откуда для частного случая равномерного установившегося потока находим

$$-A_H \left(\frac{dv_x}{dy}\right)_H = \gamma IH, \quad (4.75)$$

где I — уклон водной поверхности, H — глубина потока. Такое соотношение легко получить, если использовать рассуждения, примененные при выводе формулы (4.39), полагая при этом, что $y = H$.

Рассмотрим граничное условие на поверхности, применяемое при исследовании поля мутности потока. Используем формулу турбулентного переноса наносов через единицу горизонтальной площадки в единицу времени $(q_s)_y$. Учитывая, что наносы не проникают через свободную поверхность воды, пишем

$$(q_s)_{y,0} = -\frac{g}{\gamma} A_0 \left(\frac{ds}{dy}\right)_0 + us_0 = 0, \quad (4.76)$$

откуда

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)_0 = \frac{\gamma u}{g A_0} s_0. \quad (4.77)$$

Переходя к третьей форме задания граничных условий, укажем, что она широко используется при решении задач о движении наносов и о термике потоков. В связи с этим отметим весьма плодотворное предложение В. М. Маккавеева об учете двух значений мутности потока у дна: собственно донной мутности s_H , соответствующей осредненной мутности в основной турбулентной зоне потока у дна, и пограничной мутности, называемой мутностью взмыва и обозначаемой через $s_{взм}$ (см. главу XIII).

Остановимся теперь несколько более подробно на граничных условиях у дна, принимаемых при рассмотрении вопросов динамики и кинематики потоков и отвечающих более сложным случаям, чем тот, который принят при выводе формулы (4.75).

Важной особенностью турбулентного потока вблизи дна или стенок, именно в его граничном слое, следует считать резкое

уменьшение составляющих осредненных скоростей течения. Для учета указанной особенности В. М. Маккавеев рекомендует следующий вид граничных условий:

$$v_H + l \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_H = 0. \quad (4.78)$$

Производная осредненной скорости берется по нормали ко дну или стенке. Некоторая длина l , являющаяся параметром в этой формуле, может быть установлена на основании эмпирических данных, в частности, для этой цели могут быть использованы эмпирические уравнения профиля скорости.

Применяя, например, формулу Базена, можно получить

$$l = \left(\frac{C}{2m} - \frac{1}{3} \right) H, \quad (4.79)$$

где C — коэффициент Шези, $m=24$ (по Базену) или, по автору, $m=0,35C+3$ при $C \leq 60$. Параметр l прямо пропорционален глубине потока и уменьшается с увеличением шероховатости русла.

Остановимся на задании граничных условий при решении задач термики и движения наносов.

Известно, что при нагревании или охлаждении турбулентного потока от стенки в непосредственной от нее близости наблюдается очень большой градиент температуры, который резко уменьшается при удалении от стенки, и уже на небольшом расстоянии от нее изменение температуры становится относительно малым. Точно установить толщину слоя, в котором температура изменяется скачкообразно, и определить теплопроводность этого слоя весьма затруднительно. Возникающие затруднения устраняются введением понятия теплопередачи через граничный слой при использовании известной формулы Ньютона

$$(q_\theta)_{\text{гран}} = -\alpha(\theta_{\text{гран}} - \theta_{\text{внешн}}), \quad (4.80)$$

где $\theta_{\text{гран}}$ — температура в потоке на границе основной турбулентной зоны потока и пограничного слоя; эта величина определяется в ряде задач экстраполяцией кривой распределения температуры в потоке до стенки, $\theta_{\text{внешн}}$ — температура стенки, α — коэффициент теплопередачи, который находится экспериментально.

Можно провести определенную аналогию между процессом взвешивания наносов со дна потока и теплопередачей через граничную поверхность. В этой аналогии значение s_H соответствует $\theta_{\text{гран}}$, а мутность, возникающая у самой поверхности стенки под действием струй потока, обозначаемая через $s_{\text{взм}}$, соответствует температуре стенки. Более полно вопрос о переносе наносов в граничном слое потока будет рассмотрен в разделе о наносах, где также раскрывается и физическая сущность мутности взмыва.

§ 9. Динамический и статистический подходы к изучению турбулентности. Исследования Маккавеева, Прандтля, Рейнольдса, Фридмана, Колмогорова

В основе теоретических исследований турбулентного движения и теоретических моделей турбулентного потока лежат две концепции, имеющие много точек соприкосновения, — это динамическая и статистическая концепции. Первая из них основывается на изучении напряжений, характерных для турбулентного потока, обусловленных пульсацией скоростей, вторая изучает статистические характеристики пульсирующего скоростного поля, приходя в ряде случаев к динамическим соотношениям.

В предыдущих параграфах главы IV наряду с рассмотрением основных особенностей турбулентного движения жидкости изложена имеющая динамический характер теория турбулентного перемешивания русловых потоков, называемая иногда диффузионной теорией турбулентности. В основу этой теории положены идеи о турбулентном переносе количеств движения, взвешенных веществ и тепла, высказанные в 1915 г. Дж. Тейлором и в 1917—1925 гг. В. Шмидтом, рассмотревшими простейшую задачу об атмосферной турбулентности.

Общая теория турбулентного перемешивания применительно к русловым потокам, отличающимся наиболее сложной структурой, разработана В. М. Маккавеевым и его школой. Начало разработки теории относится к 1931 г.; более глубокое обоснование она получила в послевоенные годы.

Эта теория, имеющая фундаментальный характер, рассматривает пространственные модели переноса количеств движения, примесей (растворенных веществ и взвесей) и тепла, дает общие дифференциальные уравнения такого переноса (динамические уравнения, уравнения диффузии и теплопроводности), определяет граничные условия и изучает структуру коэффициентов турбулентного обмена, турбулентной диффузии и теплопроводности. Во всех конкретных решениях этой теории учитывается русловое трение.

Теория турбулентного перемешивания имеет широкое применение в практике расчетов речных потоков, каналов, водохранилищ, движения в них наносов, их термики. Возможности теории очень велики, однако в ряде случаев получаемые решения отличаются приближенностью, иногда они носят весьма ориентировочный характер. Имеется немало и таких задач, способы решения которых не разработаны или не представляются достаточно ясными с точки зрения существующего представления о турбулентных потоках.

Теория турбулентности русловых потоков, методика их расчета — это та область гидравлики, которая весьма интенсивно развивалась в последние десятилетия, и надо полагать, что

в ближайшее время мы станем свидетелями значительных новых достижений в этой области.

Говоря о диффузионной теории турбулентности, нельзя не упомянуть и о другом направлении этой теории, развитием так называемой геттингенской школой, основоположниками которой являются Л. Прандтль и Т. Карман, уделившие особое внимание турбулентному течению в трубах, обтеканию пластин. Прандтлем разработана, в частности, теория пограничного слоя турбулентного потока, сыгравшая в свое время положительную роль в развитии общих представлений о турбулентном потоке, но в настоящее время признаваемая неточной. Ученые этой школы на основании экспериментального изучения пограничного слоя стремились обосновать выражение коэффициента турбулентного обмена.

Предложенное Прандтлем в 1925 г. выражение имеет вид

$$A = \rho l^2 \frac{dv_x}{dy}; \quad (4.81)$$

здесь ρ — плотность жидкости, l — некоторая линейная величина, зависящая от расстояния точки от стенки и условно названная Прандтлем путем перемешивания. Путь перемешивания в последующих работах подвергался специальному изучению. Формула (4.81) не может считаться универсальной, что легко обнаружить, применяя ее, например, для динамической оси потока, где скорость течения имеет максимум, а производная скорости равна нулю. Здесь формула приводит к явно неверному результату, давая нулевое значение A , хотя в действительности в этой области потока имеет место интенсивное перемешивание и должно получаться большое значение A .

Теория турбулентного перемешивания и теория Прандтля, развитые на основе динамического подхода, имеют также и статистический аспект: они используют статистические методы при осреднении и получении характеристики пульсационных величин.

Одновременным применением динамического и статистического подходов к исследованию турбулентности отличаются разработки О. Рейнольдса, выполненные в конце прошлого века. Сведения о некоторых результатах, полученных Рейнольдсом, даны в главе I настоящей книги. Здесь остановимся на выведенных им динамических уравнениях турбулентного потока. В основе вывода этих уравнений лежат соотношения Рейнольдса—Лоренца для составляющих касательного напряжения, имеющие вид

$$\tau_{xy} = -\overline{v'_x v'_y}, \quad \tau_{xz} = -\overline{v'_x v'_z}, \dots \text{ и т. д.}, \quad (4.82)$$

где, как и прежде, v'_x , v'_y — компоненты пульсационной скорости. Помимо динамического смысла (выражение касательных

напряжений трения в турбулентном потоке) формулы (4.82) имеют и статистический смысл, являясь моментами корреляции (или моментами второго порядка) составляющих пульсационных скоростей.

Выведенные О. Рейнольдсом дифференциальные уравнения турбулентного движения при исключении из них (как весьма малых) членов, учитывающих физическую вязкость воды, записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'_x v'_x}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'_x v'_y}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'_x v'_z}}{\partial z}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'_x v'_y}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'_y v'_y}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'_y v'_z}}{\partial z}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\overline{\partial v'_x v'_z}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'_y v'_z}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'_z v'_z}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (4.83)$$

Три последних члена в каждом из этих уравнений учитывают внутреннее турбулентное трение.

Уравнения Рейнольдса имеют большое теоретическое значение. Для практических же целей применение их весьма ограничено, так как они представляют собой незамкнутую систему. Число неизвестных функций, содержащихся в этих уравнениях и в уравнении неразрывности, дополняющем систему, значительно превышает число уравнений. К таким неизвестным функциям относятся, в частности, и моменты корреляции, которые в действительности могут быть определены только экспериментально для вполне конкретных условий.

Приведенные выше формулы касательного напряжения могут быть выведены довольно простым способом при использовании теоремы количества движения переменной массы.

Выделим в турбулентном потоке некоторый контрольный объем, заключающий вполне определенную массу. За счет турбулентных пульсационных движений в этот объем поступают объемы (порции) жидкости из соседних областей потока и одновременно из него в соседние области выходят объемы, равные поступившим. Вместе с первыми в контрольный объем приносится некоторое количество движения, а вместе со вторыми некоторое количество движения выносится из контрольного объема.

Запишем уравнение количества движения в проекции на ось x для контрольной массы M , к которой присоединяются отдельными порциями массы δM_h и из которой удаляются массы δM_m . Каждая из этих порций в момент присоединения и в момент отделения обладает проекцией скорости на ось x , соответственно равной v_{xh} и v_{xm} .

Таким образом, приносимые и уносимые порции количеств движения могут быть обозначены произведениями $\delta M_k v_{xk}$ и $\delta M_m v_{xm}$. Составляя для контрольного объема уравнение количеств движения для промежутка времени Δt , необходимо учесть сумму всех порций, принесших количества движения, и сумму порций, вынесших количества движения, т. е. следует написать

$$\Delta(Mv_x) = \sum \delta M_k v_{xk} - \sum \delta M_m v_{xm} + \Delta t \sum F_x,$$

где $\Delta(Mv_x)$ — изменение количеств движения контрольной массы M за время Δt , а $\Delta t \sum F_x$ — импульс суммы внешних сил, действующих на контрольную массу в течение времени Δt .

Первые два члена правой части уравнения представляют собой разность присоединенных и отделенных количеств движения; часть этой разности отвечает переносу количеств движения через контрольную площадку $\Delta\omega_y$, имеющую внешнюю нормаль y и являющуюся частью общей поверхности, ограничивающей контрольную массу M . Эта разность может быть представлена как проекция на ось x импульса равнодействующей касательных напряжений внутреннего трения в турбулентном потоке (виртуальной вязкости) τ_{xy} , т. е.

$$(\sum \delta M_k v_{xk} - \sum \delta M_m v_{xm})_{\Delta\omega_y} = \tau_{xy} \Delta\omega_y \Delta t. \quad (4.84)$$

Обозначим мгновенные значения проекции скоростей v_x и v_y через сумму осредненных величин \bar{v}_x и \bar{v}_y и пульсационных добавок v'_x и v'_y . Для упрощения выкладок примем, что ось x совпадает с направлением осредненного течения, а поэтому осредненное значение поперечной скорости \bar{v}_y равно нулю. В соответствии с этим записываем

$$v_{xk} = \bar{v}_{xk} + v'_{xk};$$

$$v_{xm} = \bar{v}_{xm} + v'_{xm};$$

$$v_{yk} = v'_{yk};$$

$$v_{ym} = v'_{ym}.$$

Размеры перемещающихся через площадку $\Delta\omega_y$ масс δM_k и δM_m можно выразить соотношениями, учитывающими вертикальные пульсации $\pm v'_y$, т. е. написать для массы, присоединяющейся к контрольному объему,

$$\delta M_k = \frac{\gamma}{g} \Delta\omega_y (-v'_y) \delta t \quad (4.85)$$

и для массы, отделяющейся от контрольного объема,

$$\delta M_m = \frac{\gamma}{g} \Delta \omega_y (+v'_y) \delta t. \quad (4.86)$$

Здесь δt выражает равные интервалы времени, по которым ведется подсчет порций масс, пересекающих площадку $\Delta \omega_y$ в одну или в другую сторону. Если через n_1 обозначить число порций массы, вошедшей в объем, а через n_2 — число порций массы, вышедшей из объема за время Δt , то, очевидно, на основании принятых предположений можно написать

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= n_1 \delta t + n_2 \delta t = n \delta t, \\ n &= n_1 + n_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.87)$$

Учитывая выражения для мгновенных скоростей и подставляя равенство (4.86) в формулу (4.84), получаем следующую запись ее левой части:

$$\begin{aligned} & (\sum \delta M_k v_{xk} - \sum \delta M_m v_{xm})_{\Delta \omega_y} = \\ &= \frac{\gamma}{g} \Delta \omega_y \delta t \left[\sum_{n_1} (-v'_y) (\bar{v}_{xk} + v'_x) - \sum_{n_2} (+v'_y) (\bar{v}_{xm} + v'_x) \right]. \end{aligned}$$

Произведем умножение под знаками сумм и вместо члена в квадратных скобках получим

$$- \sum_{n_1} \bar{v}_{xk} v'_y - \sum_{n_1} v'_y v'_x - \sum_{n_2} \bar{v}_{xm} v'_y - \sum_{n_2} v'_y v'_x.$$

Пренебрегая различием средней продольной скорости порций масс, перемещающихся в направлении оси y и в противоположном направлении, примем $\bar{v}_{xk} \cong \bar{v}_{xm}$. Учитывая это равенство, складывая суммы n_1 и n_2 членов и записывая их под общим символом суммы, находим следующее выражение для рассмотренной выше разности:

$$\begin{aligned} & (\sum \delta M_k v_{xk} - \sum \delta M_m v_{xm})_{\Delta \omega_y} = \\ &= - \frac{\gamma}{g} \Delta \omega_y \delta t \left[\sum \bar{v}_x v'_y + \sum v'_x v'_y \right]. \quad (4.88) \end{aligned}$$

Первый член правой части этого выражения тождественно равен нулю, что вытекает непосредственно из определения пульсационной скорости: вспомним, что сумма пульсационных отклонений v' за достаточный для осреднения промежуток времени равна нулю; равна нулю и сумма произведений v' на постоянную величину \bar{v}_x .

Преобразуем оставшийся член правой части уравнения

$$\sum^n v'_x v'_y = n \frac{\sum^n v'_x v'_y}{n} = n \overline{v'_x v'_y}. \quad (4.89)$$

Учитывая равенства (4.89) и (4.87), записываем выражение (4.88) следующим образом:

$$(\sum \delta M_k v_{xk} - \sum \delta M_m v_{xm})_{\Delta \omega_y} = -\frac{\gamma}{g} \Delta \omega_y \Delta t \overline{v'_x v'_y}. \quad (4.90)$$

Из сопоставления полученной зависимости с равенством (4.84) находим формулу Рейнольдса—Лоренца

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{g} \overline{v'_x v'_y}. \quad (4.91)$$

Весьма полное развитие получил статистический подход к изучению турбулентного потока в работах А. А. Фридмана и Л. В. Келлера (1924 г.), рассмотревших статистические характеристики турбулентности для сжимаемой жидкости (атмосферы). В теории этих ученых, помимо корреляции между компонентами скорости в точке потока (используемой, например, Рейнольдсом), рассматривается также и корреляция между компонентами скорости в двух различных точках потока.

Полученная А. А. Фридманом и Л. В. Келлером весьма громоздкая система, состоящая из многих дифференциальных уравнений, содержит моменты связи между пульсирующими скоростями второго и третьего порядков. Система уравнений оказывается незамкнутой, так как содержащееся в ней число неизвестных функций превышает число уравнений. Принимаемое далее в теории допущение о равенстве нулю моментов третьего порядка позволяет замкнуть систему уравнений. Однако такой способ замыкания, носящий произвольный характер, не приводит все же к положительным результатам, так как система уравнений сохраняет свою громоздкость и практически остается непригодной для решения конкретных задач. Известны лишь отдельные попытки применения этой теории к простейшему случаю изотропной турбулентности атмосферы.

Предпринятая Е. М. Минским (1952 г.) попытка применения теории Фридмана—Келлера к русловым потокам дала фактически негативный результат: была обнаружена, в частности, невозможность установления связи между статистическими характеристиками, фигурирующими в уравнениях, и русловым сопротивлением, которое вместе с полем осредненных скоростей следует считать определяющим фактором в формировании турбулентности.

Выше был использован термин «изотропная турбулентность». Изотропной турбулентностью именуется такое состояние потока, при котором все компоненты статистических характеристик пульсирующей скорости, в частности, моменты корреляции, составленные для каждой точки, оказываются взаимно равными. Понятие однородной турбулентности предполагает независимость статистических характеристик скоростного поля потока от координат, т. е. от места расположения точки в потоке. Понятия однородной и изотропной турбулентности представляют собой идеализацию турбулентного потока. К такой идеализированной схеме в некоторых случаях приближается атмосферная турбулентность на значительном удалении от земной поверхности, турбулентность в аэродинамической трубе за выравнивающими решетками. Турбулентность русловых потоков далека от схем изотропной и однородной турбулентности и эти схемы могут применяться к ним лишь в весьма ограниченных случаях.

Русловая турбулентность является неизотропной (анизотропной). Укажем, что моменты корреляции $\overline{v'_x v'_y}$, $\overline{v'_x v'_z}$ и т. д., которые, как мы уже знаем, могут быть выражены произведением коэффициента турбулентного обмена на сумму двух производных компонент скорости по координатным направлениям, не являются взаимно равными, что обусловлено характерным для руслового потока распределением осредненных скоростей в поперечном сечении, наличием поперечных составляющих осредненной скорости.

В 1941 г. А. Н. Колмогоровым была разработана теория локальной изотропной турбулентности. В основе этой теории лежит развитое в работах Л. Ричардсона (1926 и 1929 гг.) представление о турбулентной структуре потока, как о совокупности вихревых образований (турбулентных образований) различных размеров (масштабов).

По представлению Колмогорова, за счет неустойчивости осредненного движения возникают вихревые образования наиболее крупного размера. За счет неустойчивости и распада этих вихрей образуются вихри более мелкого масштаба, которые в свою очередь порождают еще более мелкие турбулентные образования. По всему этому каскаду вихрей передается энергия осредненного движения, которая, согласно концепции Колмогорова, гасится в вихрях самого мелкого масштаба, характеризующихся устойчивым ламинарным движением и внутренним трением, определяемым физической вязкостью жидкости; здесь кинетическая энергия переходит в тепловую.

Наиболее существенное место в теории Колмогорова занимает представление о локальной изотропии турбулентного потока. Колмогоров исходит из имеющей место тенденции к равномерному распределению по степеням свободы энергии внутри

турбулентных образований и учитывает, что такому выравниванию препятствуют анизотропные внешние силы, величины которых уменьшаются с уменьшением масштабов указанных образований. Он считает поэтому возможным пренебречь действием этих сил на турбулентные образования достаточно мелкого масштаба, принимая, таким образом, локальную изотропию мелкомасштабных турбулентных движений.

Турбулентные образования такого достаточно мелкого масштаба получают энергию от образований более крупных (нижнего порядка) и передают ее только образованиям высшего порядка, внутри наиболее мелких из них и осуществляется переход энергии в тепловую.

На основании такой схемы Колмогоров оценивает средний поток энергии по каскаду турбулентных образований и приравнивает его диссипации энергии в мелкомасштабных турбулентных образованиях. Далее, для области локальной изотропии выводится формула, связывающая масштаб турбулентности, коэффициент турбулентной диффузии и диссипацию энергии турбулентности. Эта формула применяется при изучении атмосферной турбулентности. Известны попытки ее применения для турбулентности глубоководного моря. Для русловых потоков эта формула до сих пор не применялась; ее применение встречает существенные затруднения ввиду исключительной сложности структуры русловой турбулентности.

В последние годы весьма усиленно ведется работа по изучению структуры русловых турбулентных потоков, причем существенное внимание уделяется самому процессу турбулизации, возбуждению турбулентных движений в придонной области потока. Из наиболее важных экспериментальных исследований в этом направлении следует указать в первую очередь фундаментальные исследования И. К. Никитина (1959—1963 гг.), эксперименты В. Н. Гончарова, получившие оригинальную трактовку в ряде его работ (1954—1962 гг.), исследования Е. М. Минского (1952 г.), Б. А. Фридмана и др.

В теоретическом плане структура турбулентного потока и, в частности, его придонной области рассмотрена в ряде трудов В. М. Маккавеева (1947—1966 гг.). Выше была уже изложена его идея о разделении турбулентной пульсации на чистую пульсацию и пульсацию, зависящую от характеристик осредненного поля скоростей. В дальнейшем Маккавеев уделит особое внимание процессам формирования турбулентных пульсаций в придонной области потока, находящейся под непосредственным влиянием шероховатого дна, структуре вихревых образований придонной области и взаимодействию этих образований. Важным итогом работы явилось составление уравнений моментов количества движения и энергетического уравнения, учитывающего процессы гашения и восстановления энергии пульсационных

движений, рассматриваемых как вращательные движения. В своей работе Маккавеев указывает, что половина энергии внешних сил, действующих на поток, расходуется на гашение, а половина — на непрерывное восстановление комплекса пульсационных движений.

Сделанный здесь краткий обзор исследований турбулентных потоков свидетельствует, с одной стороны, об исключительной сложности проблемы турбулентности и незавершенности многих теоретических разработок, с другой — о существенных достижениях теории турбулентности, позволяющей уже теперь решать многие, иногда сложные практические задачи.

Глава V

СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

§ 1. Распределение осредненной скорости и коэффициента турбулентного обмена по вертикали

Характер распределения осредненной скорости по вертикали в турбулентном потоке зависит от многих факторов. Основными из них являются: величина средней скорости потока, глубина, шероховатость русла, уклон водной поверхности, характер изменения скорости течения во времени и по длине потока. Ввиду этого нельзя получить простой зависимости, которая выражала бы распределение скорости по вертикали для самого общего случая. В гидрологии и в гидравлике устанавливается уравнение распределения скоростей по вертикали для наиболее простого случая, именно для установившегося равномерного потока, протекающего в широком прямолинейном русле, или в прямолинейной круглой трубе. Условие о том, что рассматривается широкий поток, существенно потому, что в этом случае пренебрежимо мало влияние боковых стенок на распределение по вертикали скоростей в основной части потока. Принимается далее, что поперечные скорости являются небольшими и поэтому могут не учитываться. Это возможно именно при взятом предположении об относительной прямолинейности потока.

Для решения поставленной задачи воспользуемся общими дифференциальными уравнениями турбулентного движения потока, приведенными в предыдущей главе (уравнениями Маккавеева). Принимаем, что ось x совпадает с направлением течения потока. Поперечные составляющие осредненной скорости в соответствии с принятым условием отсутствуют, т. е. $v_y = v_z = 0$. Очевидно, что из трех дифференциальных уравнений рассматриваемой системы для решения поставленной задачи сохраняется

только одно — уравнение для продольной скорости v_x , которую ниже будем обозначать через v (т. е. без индекса x).

Учитывая все принятые выше ограничения, записываем указанное уравнение следующим образом:

$$0 = X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (5.1)$$

Если принять далее, что ось x расположена на свободной поверхности потока, то второй член правой части уравнения (5.1) превращается в нуль, т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Единственной массовой силой, действующей на поток, является сила тяжести. Проекция на ось x ускорения силы тяжести выразится так:

$$X = g \sin \alpha \cong gI. \quad (5.2)$$

Здесь I — уклон водной поверхности, равный тангенсу угла α , образуемого водной поверхностью и горизонтальной линией. При малых углах α уклон I с достаточным приближением может быть принят равным $\sin \alpha$.

Ввиду того что в уравнении (5.1) содержится только один аргумент y , частные дифференциалы в нем могут быть заменены полными и при учете вышесказанного оно может быть записано таким образом:

$$-I = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dy} \left(A \frac{dv}{dy} \right).$$

Интегрируем уравнение

$$-\gamma I \int dy = \int d \left(A \frac{dv}{dy} \right) + C_1$$

и получаем

$$-\gamma I y = A \frac{dv}{dy} + C_1. \quad (5.3)$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная; находим ее из следующего граничного условия на свободной поверхности: при $y=0$ производная $\frac{dv}{dy} = 0$, поэтому и $C_1 = 0$. Теперь имеем

$$-\gamma I y = A \frac{dv}{dy}. \quad (5.4)$$

Напомним, что то же самое уравнение было получено в предыдущей главе непосредственно из рассмотрения сил,

действующих на выделенный в потоке параллелепипед с высотой y и площадью основания, равной единице.

Уравнение (5.4) можно разрешить относительно коэффициента турбулентного обмена, т. е. написать

$$A = - \frac{\gamma I y}{\frac{dv}{dy}}. \quad (5.5)$$

Изучение кривых распределения скорости по вертикали в реках и широких каналах позволило автору установить, что в условиях открытых потоков производная скорости по глубине $\frac{dv}{dy}$ в большинстве случаев имеет вид вогнутой кривой, схематически

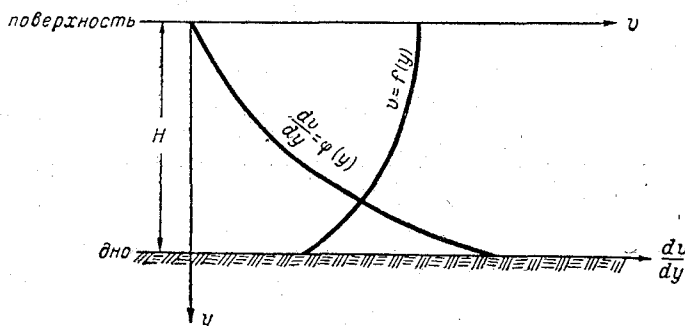


Рис. 5.1. Характерное распределение скорости и вертикального градиента скорости по вертикали открытого турбулентного потока.

изображенной на рис. 5.1. При такой форме этой кривой формула (5.5) дает постепенное возрастание коэффициента турбулентного обмена от дна к поверхности потока, подобное возрастанию скорости течения. На основании этого приходим к заключению, что при равномерном, установившемся движении потока, находящегося только под действием силы тяжести, можно приближенно принять, что коэффициент турбулентного обмена возрастает вместе с возрастанием скорости, т. е.

$$A \cong kv, \quad (5.6)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Теперь найдем уравнение распределения скорости по вертикали. Подставим равенство (5.6) в уравнение (5.5) и напишем

$$kv \frac{dv}{dy} = -\gamma I y.$$

Интегрируем это уравнение

$$k \int v dv = -\gamma I \int y dy + C_2$$

и находим

$$\frac{1}{2} k v^2 = -\frac{1}{2} \gamma I y^2 + C_2. \quad (5.7)$$

Произвольную постоянную C_2 определяем на основании граничного условия на свободной поверхности, где $y=0$, а $v=v_0$ (v_0 — поверхностная скорость)

$$C_2 = \frac{1}{2} k v_0^2.$$

Подставляя значение C_2 в выражение (5.7), получаем

$$\frac{1}{2} k v^2 = -\frac{1}{2} \gamma I y^2 + \frac{1}{2} k v_0^2$$

или

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{\gamma I}{k} y^2}. \quad (5.8)$$

Это — эллиптическое уравнение распределения скорости по вертикали. Вынося v_0^2 из-под знака радикала и вводя безразмерную переменную $\tilde{y} = \frac{y}{H}$, будем иметь следующую запись уравнения (5.8):

$$v = v_0 \sqrt{1 - P \tilde{y}^2}, \quad (5.9)$$

где безразмерный параметр P выражается следующим образом:

$$P = \frac{\gamma I H^2}{k v_0^2}. \quad (5.10)$$

Согласно формуле Шези

$$IH = \frac{v_{\text{cp}}^2}{C^2}.$$

Подставляя в выражение (5.10) значение IH , получим

$$P = \frac{\gamma v_{\text{cp}}^2 H}{k v_0^2 C^2}. \quad (5.11)$$

Анализ эмпирических кривых распределения скорости по вертикали $v(y)$ позволил найти выражение параметра P . Это эмпирическое выражение имеет вид

$$P = \frac{M v_{\text{cp}}^2}{C v_0^2}, \quad (5.12)$$

где величина M — функция коэффициента Шези C ; она связана с C такой зависимостью (для пределов $10 \leq C \leq 60$):

$$M = 0,7C + 6. \quad (5.13)$$

При $C > 60$ величина M является постоянной

$$M = 48 = \text{const.} \quad (5.14)$$

Размерность M соответствует размерности коэффициента Шези, т. е. равна корню квадратному из ускорения.

Сравнение выражений (5.11) и (5.12) позволяет найти следующую зависимость для коэффициента k , содержащегося в формуле коэффициента турбулентного обмена:

$$k = \frac{\gamma H}{MC}. \quad (5.15)$$

Подставляя значение k в равенство (5.6), находим в окончательном виде следующую приближенную формулу коэффициента турбулентного обмена:

$$A = \frac{\gamma H v}{MC}, \quad (5.16)$$

или

$$A = \frac{\gamma H v_0}{MC} \sqrt{1 - P y^2}. \quad (5.17)$$

Формулы (5.16) и (5.17) позволяют вычислить коэффициент A в любой точке вертикали. Наибольшим он оказывается у поверхности потока, а наименьшим у дна. Зависимостью (5.12) неудобно пользоваться при вычислениях, поэтому для параметра P предложены и другие соотношения, имеющие вид:

при $10 \leq C \leq 60$

$$P = 0,57 + \frac{3,3}{C}, \quad (5.18)$$

при $60 \leq C \leq 90$

$$P = 0,0222C - 0,000197C^2. \quad (5.19)$$

При выполнении практических расчетов часто приходится прибегать к различным упрощениям, одним из которых является использование осредненного для вертикали, для поперечного профиля или для изучаемого участка потока (реки) значения коэффициента турбулентного обмена. Такое осредненное значение находится по формуле, получаемой непосредственно на основании выражения (5.16)

$$A_{\text{ср}} = \frac{\gamma H v_{\text{ср}}}{MC}. \quad (5.20)$$

Здесь $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость соответственно на вертикали, поперечнике или участке потока. Остальные величины, входящие в формулу (5.20), также соответственно относятся к вертикали, профилю или участку.

В гидрологии и гидравлике известен целый ряд уравнений распределения скорости по вертикали, большинство из них построены лишь на основании эмпирических данных, для построения других использованы те или иные гипотезы. Так, в частности, рассмотренное выше эллиптическое уравнение основано на гипотезе о пропорциональности коэффициента A местной скорости v . Эта гипотеза, как было показано, имеет эмпирическое обоснование.

В предыдущей главе уже использовалась эмпирическая формула Базена

$$v = v_0 - \frac{mv_{\text{ср}}}{C} \tilde{y}^2, \quad (5.21)$$

где m — по указаниям Базена — постоянная, равная 24. Исследования, выполненные в недавнее время, показали, что параметр параболы Базена m не является постоянной величиной, а зависит от коэффициента Шези и может быть выражен зависимостью

$$m = \frac{M}{2} = 0,35C + 3.$$

Парабола Базена может быть легко получена из уравнения (5.5), если использовать гипотезу о постоянстве коэффициента турбулентного обмена A по вертикали. Уравнение (5.21) можно рассматривать и как приближенное, полагая, что переменная A в уравнении (5.5) заменена постоянной величиной, равной среднему по вертикали значению коэффициента турбулентного обмена $A_{\text{ср}}$.

Гипотезы, использованные при получении логарифмических уравнений профиля скорости или уравнений парабол с вертикальной осью (парабола Базена является квадратичной параболой с горизонтальной осью), рассматривают ту область потока, которая непосредственно примыкает к твердой стенке. Некоторые из уравнений такого типа обнаруживают тем не менее близость к натурным профилям скорости на вертикалях речных потоков и применительно к рекам рассматриваются как приближенные эмпирические уравнения. Несовершенство логарифмических уравнений и парабол с вертикальной осью легко выясняется при сравнении получаемых на их основе графиков распределения производной скорости по вертикали с графиками производной, полученными по натурным данным. Явно неудовлетворительный результат дают попытки использования указанных уравнений для получения выражения распределения коэффициента турбулентного обмена по вертикали.

Приведем некоторые из наиболее известных уравнений такого типа.

Логарифмическое уравнение Т. Кармана имеет вид

$$v = v_0 + \frac{2,3}{k_*} v_* \lg(1 - \tilde{y}). \quad (5.22)$$

Здесь $k_* \cong 0,4$ — константа Кармана, v_* — так называемая динамическая скорость, определяемая равенством

$$v_* = \sqrt{gHI}, \quad (5.23)$$

где, как и прежде, g — ускорение силы тяжести, H — глубина потока, I — поверхностный уклон.

Логарифмическое уравнение Ясмунда—Никурадзе записывается в виде

$$v = \frac{2,3}{k_*} v_* \lg\left(1 + \frac{1 - \tilde{y}}{\alpha}\right), \quad (5.24)$$

где α — характеристика относительной шероховатости. В работах М. А. Великанова, широко пользовавшегося уравнением Ясмунда—Никурадзе, даются численные значения α .

Уравнение профиля скорости в виде параболы с вертикальной осью предложено, в частности, Коллупайло. Уравнение Коллупайло приводится к виду

$$v = a_* (H - y)^{\frac{n}{0,15}}. \quad (5.25)$$

Здесь n — коэффициент шероховатости по Маннингу, a_* — эмпирический коэффициент. Во всех приведенных выше уравнениях $v(y)$ принято, что координата y направлена сверху вниз и имеет начало у поверхности потока.

На рис. 5.2 изображены графики распределения по вертикали скорости и производной скорости $\frac{dv}{dy}$, полученные по приведен-

ным выше формулам, а также по данным натурных измерений на одном из участков р. Волги. Параметры расчетных формул вычислены применительно к тому же участку реки. Рисунок показывает, что в отношении распределения скорости по вертикали хороший результат дают эллиптическая формула и парабола Базена. Остальные формулы дают удовлетворительный результат только для основной части потока, на некотором удалении от дна; для придонного же слоя получается неудовлетворительный результат. В отношении распределения производной скорости и коэффициента турбулентного обмена хороший результат дает эллиптическая кривая, удовлетворительный — парабола Базена, а остальные упомянутые формулы оказываются в этом отношении неудовлетворительными.

Эллиптическая формула и уравнение Базена позволяют найти соотношения между средней скоростью $v_{\text{ср}}$ на вертикали и скоростями у поверхности и у дна, а также между донной скоростью v_H и поверхностной v_0 .

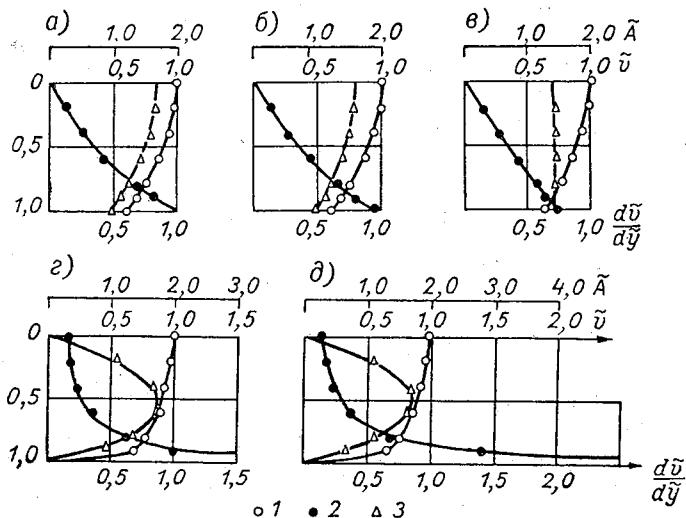


Рис. 5.2. Распределение безразмерных величин скоростей, градиентов скорости и коэффициентов турбулентного обмена, вычисленных по различным формулам, в сравнении с осредненными кривыми для участка р. Волги.

1 — скорость \tilde{v} , 2 — производная $\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{y}}$, 3 — коэффициент турбулент-

ного обмена \tilde{A} .
 а — осредненная эмпирическая кривая, б — эллиптическая формула Караушева, в — формула Базена, г — формула Коллупайло, д — формула Ясмунда-Никурадзе.

Интегрируя, например, уравнение Базена по вертикали в пределах от поверхности ($\tilde{y}=0$) до дна ($\tilde{y}=1$), непосредственно находим среднюю скорость

$$v_{\text{ср}} = v_0 \int_0^1 d\tilde{y} - \frac{mv_{\text{ср}}}{C} \int_0^1 \tilde{y}^2 d\tilde{y}. \quad (5.26)$$

Если аргументом формулы взять величину y , а не безразмерное отношение $\tilde{y} = \frac{y}{H}$, то множитель, стоящий перед вторым интегралом, будет содержать H^2 в знаменателе, а пределами интегрирования будут 0 и H . Для получения $v_{\text{ср}}$ в этом случае оба интеграла правой части выражения (5.26) необходимо было

бы разделить на H . Разумеется, результат получился бы таким же, как и из выражения (5.26), т. е.

$$v_{\text{ср}} = v_0 - \frac{mv_{\text{ср}}}{3C}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{v_0}{v_{\text{ср}}} = 1 + \frac{m}{3C}. \quad (5.27)$$

Подставляя в уравнение Базена $\tilde{y}=1$, находим выражение донной скорости $v_{\text{н}}$ в зависимости от v_0 и $v_{\text{ср}}$

$$v_{\text{н}} = v_0 - \frac{mv_{\text{ср}}}{C}. \quad (5.28)$$

Отношение донной скорости к средней получается следующим:

$$\frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{ср}}} = 1 - \frac{2m}{3C}. \quad (5.29)$$

Все эти формулы являются приближенными. Большую степень приближения дает эллиптическое уравнение профиля скорости, которое позволяет получить следующие зависимости для поверхностной скорости

$$\frac{v_0}{v_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{M}{PC}}, \quad (5.30)$$

$$\frac{v_0}{v_{\text{ср}}} = \frac{1,11C}{C-1} \quad (5.31)$$

и для донной скорости

$$\frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{0,53C - 4,1}{C - 2}}. \quad (5.32)$$

§ 2. Пульсация скоростей, линейный масштаб турбулентности и коэффициент турбулентного обмена

В главе IV была отмечена исключительная сложность внутренней структуры турбулентного потока и возникающие в связи с этим затруднения теоретического изучения турбулентности. В настоящем параграфе рассматриваются лишь некоторые особенности турбулентной структуры потока. Целью такого рассмотрения является получение выводов, которые могут использоваться при решении конкретных теоретических и практических задач.

Русло потока является областью формирования вихрей различного размера и мощности. Эти вихри, отделяясь от поверхности русла, распространяются внутрь всего потока, увеличи-

ваясь в размерах, присоединяя к себе новые массы жидкости и соединяясь с другими вихревыми образованиями.

Интенсивность возбуждения вихрей в придонном слое потока резко возрастает с возрастанием шероховатости русла. Каждый из выступов шероховатости является источником формирования вихрей. На рис. 5.3 изображена схема обтекания единичного выступа шероховатости и образования за ним вихревой области. Такой вихрь не является стабильным, он возникает, развивается, затухает или, получив значительное развитие, отрывается от источника возбуждения и перемещается внутри потока, а в это время за выступом шероховатости возникает новый вихрь. За многочисленными выступами шероховатости образуются вихри, влияющие друг на друга, соединяющиеся между собой. В толщу потока проникают в основном эти соединившиеся, обладающие достаточной энергией вихри.

Наблюдаемые внутри турбулентного потока вихри или, как мы их называли выше, пульсационные индивидуумы, имеют период жизни, в течение которого они сохраняют кинематическое отличие от окружающих их жидких масс. Теряя свою пульсационную энергию (включающую и энергию вращения), они постепенно утрачивают свою индивидуальность, сливаются с окружающими массами жидкости и затем присоединяются к более молодым вихревым образованиям, также развивающимся, а затем угасающим. Турбулентный поток можно представить себе состоящим из вихрей различного размера, одни из них возникают у твердых стенок потока, происхождение других связано с вихрями, перемещающимися внутри потока; эти вторичные вихри являются, по видимому, менее мощными.

Общее движение жидкости в направлении уклона оказывается, как видим, осложненным вихревыми (пульсационными) движениями, обуславливающими характерную для турбулентного течения структуру потока.

Выполненное О. К. Блумберг, М. А. Великановым и другими учеными статистическое изучение пульсационных скоростей показывает, что их распределение в фиксированных точках потока при установившемся режиме последнего подчиняется закону нормального распределения (закону Гаусса), т. е. носит случайный характер. Некоторое отклонение от нормального распределения наблюдается в основном лишь в придонном слое потока.

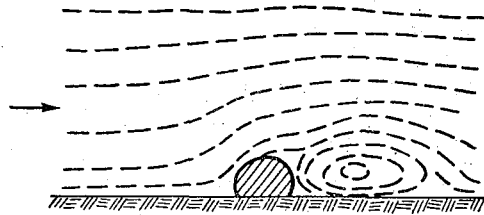


Рис. 5.3. Обтекание единичного выступа шероховатости.

Параметром кривой распределения является среднее квадратичное отклонение, которое для скорости будем обозначать через σ_v . Среднее из абсолютных величин отклонений (т. е. пульсации), обозначаемое через ω , для случая нормального распределения находится в следующем простом соотношении с величиной σ_v :

$$\omega \cong 0,8\sigma_v. \quad (5.33)$$

Изучение распределения по вертикали открытого потока пульсационных скоростей показывает, что они имеют наибольшее значение на некотором небольшом расстоянии от дна; в направлении ко дну они несколько убывают, при увеличении расстояния от дна (от точки наибольшей пульсации) они также убывают, а затем вплоть до свободной поверхности потока сохраняют почти постоянное значение. Такой закономерности подчиняются характеристики пульсации ω и σ_v вертикальной составляющей скорости (рис. 5.4). Оказывается, что наибольшие пульсации имеют место в зоне наиболее интенсивного зарождения вихрей, над выступами шероховатости.

Линейные размеры вихрей, обозначаемые через λ , как показывают измерения, в среднем возрастают от дна к поверхности потока (рис. 5.4). Заметим, что линейные размеры вихрей иначе называют размерами пульсационных индивидуумов, или линейным масштабом турбулентных возмущений.

Распределение по вертикали коэффициента турбулентного обмена A определяется распределением ω и λ . К такому выводу легко прийти, рассматривая структурную формулу коэффициента A .

В главе IV для коэффициента турбулентного обмена была записана формула

$$A = \frac{\gamma}{g} \frac{\overline{\Delta W_{xy}}}{\Delta \omega \Delta t} \lambda_*. \quad (5.34)$$

Здесь ΔW_{xy} — объем жидкости, обладающий некоторой осредненной скоростью в направлении оси x и пересекающий площадку $\Delta \omega$, перпендикулярную оси y . Линейная величина λ_* характеризует расстояние, которое проходит в потоке пульсационный объем, сохраняя свою индивидуальность. Среднее значение λ_* пропорционально среднему значению линейного размера пульсационного индивидуума λ . Действительно, чем больше λ , тем большие пути будут в среднем проходить пульсационные индивидуумы, сохраняя свое первоначальное свойство. Итак, напомним

$$\lambda = k_1 \bar{\lambda}_*.$$

Среднее значение абсолютной величины вертикальной составляющей пульсационной скорости приближенно определяется равенством

$$\omega = k_2 \frac{\overline{\Delta W_{xy}}}{\Delta \omega \Delta t}.$$

В приведенных соотношениях k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Теперь вместо выражения (5.34) можем написать

$$A = \frac{\gamma}{g} \frac{K}{k_1 k_2} \omega \lambda, \quad (5.35)$$

где K — поправочный коэффициент, учитывающий замену среднего от произведения двух величин в формуле (5.34) произведением средних величин в формуле (5.35).

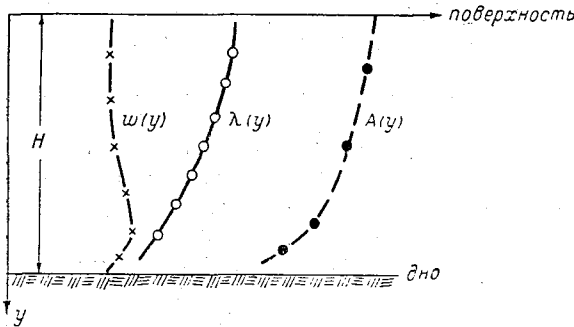


Рис. 5.4. Графики распределения по вертикали открытого потока среднего значения абсолютной величины вертикальной составляющей пульсационной скорости ω , среднего значения линейного масштаба турбулентности λ , и коэффициента турбулентного обмена A .

Вводя обобщенный коэффициент

$$k = \frac{K}{k_1 k_2},$$

записываем окончательно структурную формулу коэффициента турбулентного обмена

$$A = \frac{\gamma}{g} k \omega \lambda. \quad (5.36)$$

Эта формула имеет большое теоретическое значение, так как наглядно показывает характер зависимости коэффициента турбулентного обмена от внутренней структуры потока. Она дает возможность находить способ искусственного воздействия на интенсивность турбулентного перемешивания путем воздействия на

пульсационную скорость или размеры пульсационных индивидуумов, что можно осуществить, например, введением в поток решеток, наложением колебательных движений и т. д.

На рис. 5.4 изображен график распределения коэффициента турбулентного обмена A по вертикали, полученный по формуле (5.36) при использовании графиков $\omega(y)$ и $\lambda(y)$, изображенных на том же рисунке. Как видим, структурная формула коэффициента A позволяет подтвердить, что распределение этой величины по вертикали характеризуется плавным увеличением от дна к поверхности потока.

§ 3. Динамическое подобие открытых турбулентных и ламинарных потоков

Натурные полевые исследования речных потоков весьма трудоемки и дороги, поэтому не всегда представляется возможным организовать их достаточно полно. С другой стороны, часто оказывается необходимым получить представление о тех изменениях, которые будут иметь место в потоке после возведения в нем гидротехнических сооружений или искусственного изменения русла. Не всегда эту задачу можно решить путем расчета. Кроме того, методика расчета является приближенной, и для ответственных проектов гидротехнических сооружений результаты расчета требуют добавочного подтверждения.

Во многих случаях в целях получения данных о гидравлике потока в бытовом и в измененном сооружениями состоянии используется метод лабораторного моделирования. В лаборатории создают модель русла и пропускают расход воды. Форма русла и распределение скоростей течения модели должны отражать условия подобия натурному потоку.

Различают подобие геометрическое, кинематическое и динамическое. Геометрическое подобие имеет место в том случае, когда все линейные размеры натурального потока (натуры) l_n и модельного потока (модели) l_m находятся в постоянном соотношении α_n (α_n — линейный масштаб)

$$\alpha_n = \frac{l_n}{l_m}. \quad (5.37)$$

Кинематическое подобие отвечает условию постоянного соотношения скорости в соответствующих точках натуры v_n и модели v_m . Через α_v обозначаем масштаб скорости, который определяется отношением

$$\alpha_v = \frac{v_n}{v_m}. \quad (5.38)$$

Динамическое подобие осуществляется в том случае, когда все силы, действующие в соответствующих точках натурального по-

тока и модели, находятся в одном и том же соотношении α_F , называемом масштабом силы.

Пусть действуют следующие силы: F_T — сила тяжести, $F_{\text{сопр}}$ — сила сопротивления, $F_{\text{ин}}$ — сила инерции. Тогда условию подобия отвечает равенство

$$\frac{F_{T, \text{н}}}{F_{T, \text{м}}} = \frac{F_{\text{сопр, н}}}{F_{\text{сопр, м}}} = \frac{F_{\text{ин, н}}}{F_{\text{ин, м}}} = \alpha_F. \quad (5.39)$$

Для достижения динамического подобия практически необходимо получить соблюдение постоянства масштабов длин, времени и действующих сил.

Масштаб времени обозначаем так:

$$\alpha_t = \frac{t_{\text{н}}}{t_{\text{м}}}, \quad (5.40)$$

где $t_{\text{н}}$ — длительность какого-либо процесса в природе, $t_{\text{м}}$ — то же на модели. В качестве примера установления характерного времени приведем время прохождения жидкими массами потока расстояния между двумя створами, фиксированными на натурном потоке и на модели; характерное время может измеряться и отношением характерного линейного размера к средней скорости потока.

В действительности оказывается весьма затруднительным, а в ряде случаев и невозможным получить динамическое подобие при действии на поток нескольких сил. Практически при моделировании потоков приходится выделять главные действующие силы и выполнять моделирование при учете только этих сил. Неучтенные силы, однако, могут оказывать существенное влияние и нарушать в большей или меньшей степени подобие.

Общие дифференциальные уравнения движения потоков учитывают все основные силы, определяющие течение. Поэтому уравнения движения, представленные в безразмерном виде, дают наиболее общее теоретическое выражение динамического подобия.

Рассмотрим условие динамического подобия открытого турбулентного потока, протекающего в малоизвилистом русле с небольшим уклоном. Обратимся к общим уравнениям турбулентного движения, записанным в проекциях на три координатные направления x , y и z .

Ось x направляем вдоль течения и располагаем на свободной поверхности, в связи с чем $\frac{dp}{dx} = 0$. В малоизвилистом потоке $v_y \cong v_z \cong 0$, поэтому уравнение по оси y превращается в уравнение гидростатики

$$g \cos \alpha - \frac{g}{\gamma} \frac{dp}{dy} = 0,$$

где α — угол между осью y нормальной свободной поверхности и направлением действия силы тяжести; ввиду малости этого угла $\cos \alpha \cong 1$ и получаем

$$dp = \gamma dy.$$

Уравнение по оси z в рассматриваемом случае превращается тождественно в нуль.

Уравнение в проекции на ось x приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = gI + \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Продольную скорость v и уклон I пишем без индекса x , поскольку другие компоненты этих величин в уравнении отсутствуют.

Введем безразмерные величины \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} , \tilde{t} , \tilde{A} , \tilde{v} , полагая их равными следующим отношениям: $\tilde{x} = \frac{x}{H_{\text{cp}}}$, $\tilde{y} = \frac{y}{H_{\text{cp}}}$ и т. д. Размерные величины определяются при этом таким образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= H_{\text{cp}} \tilde{x}; \\ y &= H_{\text{cp}} \tilde{y}; \\ z &= H_{\text{cp}} \tilde{z}; \\ t &= T \tilde{t}; \\ A &= A_{\text{cp}} \tilde{A}; \\ v &= v_{\text{cp}} \tilde{v}. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Здесь H_{cp} , A_{cp} , v_{cp} — средние значения глубины, коэффициента A и скорости на участке реки; они являются характерными величинами для всего рассматриваемого участка потока. Подчиним некоторому условию характерное время T , а именно: $v_{\text{cp}} T = H_{\text{cp}}$; отсюда будем иметь

$$T = \frac{H_{\text{cp}}}{v_{\text{cp}}}. \quad (5.43)$$

Подставим равенства (5.42) в уравнение (5.41)

$$\begin{aligned} & \frac{v_{\text{ср}}}{T} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{v_{\text{ср}}^2}{H_{\text{ср}}} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \\ & = gI + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{A_{\text{ср}} v_{\text{ср}}}{H_{\text{ср}}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Первый член уравнения (5.44) содержит множитель $v_{\text{ср}}/T$. При учете равенства (5.43) этот множитель запишется так: $v_{\text{ср}}^2/H_{\text{ср}}$.

Уравнение движения (5.44) приводится к безразмерному виду путем деления на величину $v_{\text{ср}}^2/H_{\text{ср}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{gH_{\text{ср}}}{v_{\text{ср}}^2} I + \frac{gA_{\text{ср}}}{\gamma H_{\text{ср}} v_{\text{ср}}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Введем обозначения:

$$\text{Fr} = \frac{v_{\text{ср}}^2}{gH_{\text{ср}}}; \quad (5.46)$$

$$\text{N} = \frac{\gamma H_{\text{ср}} v_{\text{ср}}}{gA_{\text{ср}}}. \quad (5.47)$$

Здесь Fr — число Фруда, N — безразмерное характеристическое число турбулентного потока. Подстановка этих величин в уравнение (5.45), позволяет получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\text{Fr}} I + \frac{1}{\text{N}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

При геометрическом подобии натурального и модельного турбулентных потоков и одинаковых уклонах водной поверхности в натуре и на модели условие динамического подобия отвечает равенствам

$$\left. \begin{aligned} \text{Fr}_m &= \text{Fr}_n; \\ \text{N}_m &= \text{N}_n, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

где, как и выше, индексами «м» помечены числа, относящиеся к модели, а индексами «н» — к натурному потоку. Ниже будет показано, что первое и второе равенства (5.49) совместимы.

При моделировании турбулентных потоков особое внимание обращают на то, чтобы поток на модели был тоже турбулентным, что устанавливается по величине числа Рейнольдса на модели Re_m , которое должно превышать его верхнее критическое значение, обеспечивающее получение турбулентного режима, т. е.

$$Re_m \geq Re_{кр.верхн.}$$

в противном случае динамическое подобие не осуществляется.

Рассмотрим условия динамического подобия ламинарных потоков. В первую очередь укажем, что модель ламинарного потока должна быть тоже ламинарной. Запишем в безразмерном виде уравнения Навье—Стокса для открытого ламинарного потока. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, поток, не имеющий поперечных составляющих скорости ($v_y = v_z = 0$). Располагая ось x на свободной поверхности, запишем $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Уравнение в проекции на ось z обращается тождественно в нуль, а уравнение в проекции на ось y приводится к уравнению гидростатики.

Уравнение по оси x , приведенное к безразмерному виду, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{gH_{ср}}{v_{ср}^2} I + \frac{g\mu}{\gamma H_{ср} v_{ср}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right], \quad (5.50)$$

где μ — коэффициент молекулярной вязкости. Введем в уравнение (5.50) числа Фруда и Рейнольдса

$$Re = \frac{H_{ср} v_{ср}}{\gamma \mu}, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{Fr} I + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right]. \quad (5.52)$$

Условие подобия ламинарных потоков при $I_m = I_n$ соответствует требованию выполнения следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} Fr_m &= Fr_n; \\ Re_m &= Re_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

В то же время должно соблюдаться неравенство

$$Re_m < Re_{кр.нижн.}$$

Первое и второе выражения (5.53) в общем случае несовместимы, поэтому моделирование производят по одному из них, учитывая определяющую в рассматриваемой задаче силу.

Левая часть приведенных выше уравнений Маккавеева (5.48) и Навье—Стокса (5.52) учитывает ускорение инерционных сил, первый член правой части учитывает ускорение силы тяжести, а многочлен правой части — ускорение, определяемое силами внутреннего трения. При приведении уравнений к безразмерному виду размерные величины правой части были разделены на размерные величины инерционных членов уравнений, поэтому следует считать, что условие $Fg = \text{const}$ для модели и природы выражает условие постоянства соотношения между инерционными силами и силой тяжести. Условие $N = \text{const}$ выражает условие постоянства в природе и на модели соотношения между инерционными силами и силами виртуальной (турбулентной) вязкости, а $Re = \text{const}$ выражает постоянство в природе и на модели соотношения между силами инерции и силами, обусловленными физической вязкостью.

Ознакомимся теперь с правилами моделирования турбулентных и ламинарных потоков. Эти правила определяют соотношения между масштабом скорости и масштабом линейных размеров потока.

При моделировании, по Фруду, пишем $Fg_M = Fg_H$ или

$$\frac{v_M^2}{gH_M} = \frac{v_H^2}{gH_H}. \quad (5.54)$$

Ускорение силы тяжести g одинаково для натурального потока и для модели. Соотношение между масштабами получается следующим:

$$\left(\frac{v_H}{v_M}\right)^2 = \frac{H_H}{H_M}.$$

Учитывая принятые выше обозначения для масштаба скорости α_v и масштаба линейных размеров α_H , пишем

$$\alpha_v = \sqrt{\alpha_H}. \quad (5.55)$$

Теперь выясним, к какому правилу моделирования приводит условие постоянства характеристического числа турбулентного потока N . Подставим в формулу (5.47) значение коэффициента турбулентного обмена A , согласно выражению

$$A = \frac{\gamma H v}{MC},$$

в котором все величины являются средними для моделируемого участка потока. Приходим к следующей формуле:

$$N = \frac{MC}{g}. \quad (5.56)$$

Теперь условие равенства между значениями N модели и натуре приводится к виду

$$M_M C_M = M_N C_N. \quad (5.57)$$

Здесь принято во внимание, что ускорение силы тяжести g для натурального потока и модели одинаковое.

В § 1 настоящей главы были приведены формулы, показывающие зависимость параметра M от коэффициента Шези C . Так как M зависит лишь от одной этой величины, условие (5.57) будет выполнено при равенстве коэффициента C на модели и в натуре, т. е.

$$C_M = C_N. \quad (5.58)$$

Подставляя значение C по формуле Шези, записываем

$$\frac{v_M}{\sqrt{H_M I_M}} = \frac{v_N}{\sqrt{H_N I_N}}.$$

Если на модели обеспечивается $I_M = I_N$, то приходим к следующему соотношению масштабов скорости и линейных размеров:

$$\frac{v_N}{v_M} = \sqrt{\frac{H_N}{H_M}}$$

или

$$\alpha_v = \sqrt{\alpha_H}. \quad (5.59)$$

Видим, что правила моделирования по числам Fg и N совпадают, что облегчает постановку лабораторных исследований турбулентных потоков. Таким образом, выяснено, что моделирование по Фруду позволяет учитывать не только действие сил тяжести и инерции, но и сил (напряжений) виртуальной вязкости.

Моделирование ламинарного потока основано на использовании характеристических чисел Фруда и Рейнольдса. Выше установлено, что масштаб скорости по Фруду связан с линейным масштабом равенством

$$\alpha_v = \sqrt{\alpha_H}.$$

Постоянство числа Рейнольдса для натуре и модели дает следующее соотношение между указанными масштабами:

$$\frac{H_M v_M}{\left(\frac{g}{\gamma} \mu\right)_M} = \frac{H_N v_N}{\left(\frac{g}{\gamma} \mu\right)_N}. \quad (5.60)$$

Если в модели применяется та же жидкость, которая составляет натурный поток и притом температура жидкости на модели совпадает с температурой натурального потока, то

$$\left(\frac{g}{\gamma} \mu\right)_m = \left(\frac{g}{\gamma} \mu\right)_n.$$

В этом случае соотношение (5.60) дает равенство

$$\frac{v_m}{v_n} = \frac{H_n}{H_m}.$$

Вводя обозначения масштабов, записываем

$$\alpha_v = \frac{1}{\alpha_H}. \quad (5.61)$$

Сравнивая полученный результат с тем, что дает постоянство числа Фруда, убеждаемся в несовместимости (для общего случая) условий подобия ламинарных потоков по силе тяжести (по Fr) и по силе внутреннего трения (по Re). Ввиду этого моделирование приходится выполнять, осуществляя подобие одной из этих сил.

§ 4. Динамическое подобие и пульсация скорости

Динамическое подобие турбулентных потоков может быть рассмотрено также и при использовании дифференциальных уравнений турбулентного движения, предложенных О. Рейнольдсом. Запишем одно из этих уравнений, именно уравнение в проекции на ось x :

$$\frac{dv}{dt} = X - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v'_x v'_x})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v'_y v'_x})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{v'_z v'_x})}{\partial z}. \quad (5.62)$$

Последние три члена уравнения, содержащие моменты корреляции пульсационных скоростей, играют в уравнении Рейнольдса ту же роль, что последние три члена в уравнении Маккавеева: они учитывают касательные напряжения виртуальной вязкости.

Введем безразмерные компоненты пульсации \tilde{v}'_x , \tilde{v}'_y и \tilde{v}'_z , полагая

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \omega_{cp} \tilde{v}'_x; \\ v'_y &= \omega_{cp} \tilde{v}'_y; \\ v'_z &= \omega_{cp} \tilde{v}'_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

где ω_{cp} — среднее по вертикали потока осредненное значение абсолютных величин вертикальной составляющей пульсационной скорости.

Рассмотрим поток, в котором отсутствуют поперечные составляющие осредненной скорости, т. е. $v_y = v_z = 0$. Располагая ось x на свободной поверхности потока и направляя ее в сторону течения, напишем $X = gI$ и $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Теперь уравнение Рейнольдса принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = gI + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'_x v'_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_y v'_x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'_z v'_x}).$$

Подстановка сюда безразмерных величин и преобразования при учете выражения $T = \frac{H_{cp}}{v_{cp}}$ позволяют получить

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{gH_{cp}}{v_{cp}^2} I + \left(\frac{w_{cp}}{v_{cp}} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\overline{\tilde{v}'_x \tilde{v}'_x}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\overline{\tilde{v}'_y \tilde{v}'_x}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\overline{\tilde{v}'_z \tilde{v}'_x}) \right].$$

После введения характеристических чисел Фруда и Кармана (Ka), последнее из которых определяется выражением

$$Ka = \frac{w_{cp}}{v_{cp}}, \quad (5.64)$$

уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{I}{Fr} + Ka^2 \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\overline{\tilde{v}'_x \tilde{v}'_x}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\overline{\tilde{v}'_y \tilde{v}'_x}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\overline{\tilde{v}'_z \tilde{v}'_x}) \right]. \quad (5.65)$$

Подобие при условии $I_n = I_m$ определяется равенствами чисел Фруда и Кармана для натуре и модели, т. е.

$$\left. \begin{aligned} Fr_m &= Fr_n; \\ Ka_m &= Ka_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

Число Кармана не позволяет непосредственно получить правила моделирования; оно лишь показывает условие подобия. Поэтому при моделировании турбулентных потоков пользуются условием подобия, получаемым из постоянства числа N или коэффициента Шези.

Сравним уравнение (5.65) с безразмерным уравнением Макавеева (5.48). Замечаем, что левые части и первые члены правой части этих уравнений равны. Ввиду этого должны быть равны и трехчлены правой части, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{A} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) \right] = \\ = Ka^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{v}_x \tilde{v}_x') + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v}_y \tilde{v}_y') + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{v}_z \tilde{v}_z') \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Для каждого конкретного потока $N = \text{const}$ и $Ka = \text{const}$; отсюда вытекает, что члены, заключенные в скобках, должны быть равны или, по крайней мере, пропорциональны. Следовательно, и постоянные $\frac{1}{N}$ и Ka^2 должны быть равны или пропорциональны, т. е.

$$Ka^2 = a^2 \frac{1}{N}, \quad (5.68)$$

где a^2 — коэффициент пропорциональности. Подставляя сюда значения Ka и N , записываем

$$\left(\frac{w_{cp}}{v_{cp}} \right)^2 = a^2 \frac{g}{\gamma} \frac{A_{cp}}{H_{cp} v_{cp}}. \quad (5.69)$$

Мы знаем, что

$$A_{cp} = \frac{\gamma H_{cp} v_{cp}}{MC}.$$

После подстановки этого выражения в формулу (5.69) и преобразований находим

$$w_{cp} = v_{cp} a \sqrt{\frac{g}{MC}}.$$

Учитывая, что подкоренное выражение равно $\frac{1}{N}$, записываем

$$w_{cp} = a \frac{v_{cp}}{\sqrt{N}}. \quad (5.70)$$

Натурные данные о пульсационных скоростях показывают возможность приближенного принятия $a \approx 1$; таким образом,

$$w_{cp} = \frac{v_{cp}}{\sqrt{N}}. \quad (5.71)$$

Получили теоретическую формулу среднего по вертикали значения средней из абсолютных величин пульсационной скорости.

Эта формула подтверждается экспериментальными исследованиями и имеет применение в практике расчетов.

Выше указывалось, что распределение пульсационных отклонений скорости близко к кривой равной вероятности — кривой Гаусса. Согласно этой кривой для пульсационной скорости с обеспеченностью около 1%, которую во многих практических задачах можно принять за максимальную, можно получить следующее соотношение:

$$\omega_{\max} \cong 3\omega, \quad (5.72)$$

или

$$\omega_{\max} \cong \frac{3v_{\text{ср}}}{\sqrt{N}}, \quad (5.73)$$

где ω_{\max} — максимальное значение вертикальной составляющей пульсационной скорости.

Глава VI

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ ПОТОКАХ И ТРУБАХ

§ 1. Уравнение неравномерного движения открытого потока

Рассматривая установившееся движение жидкости, примем постоянными во времени расход потока Q и все гидравлические элементы (скорость v , глубину H , ширину B и уклон I). Особенностью неравномерного установившегося движения является, как указывалось в главе I, наличие изменений гидравлических элементов по длине потока (по его продольной оси x), что соответствует неравенствам:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0;$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \neq 0;$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} \neq 0 \text{ и т. д.,}$$

где ω — площадь поперечного сечения потока. В то же время расход Q вдоль потока остается неизменным, т. е. $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

При выводе уравнения будем иметь в виду простейший случай неравномерного движения жидкости, а именно неравномерное движение в открытом призматическом русле (в канале).

Призматическим называется такое русло, которое имеет неизменную форму и размер поперечного профиля по длине. Различают прямоугольные, треугольные, параболические, трапециевидальные и многоугольные призматические русла.

Переходя к выводу уравнения неравномерного установившегося движения в открытом русле, изобразим схему потока (рис. 6.1), которая отражала бы условие

$$\frac{dH}{dx} \neq 0;$$

где H — глубина потока. Здесь пишем полную производную, так как единственным аргументом в рассматриваемом типе потока является продольная координата x .

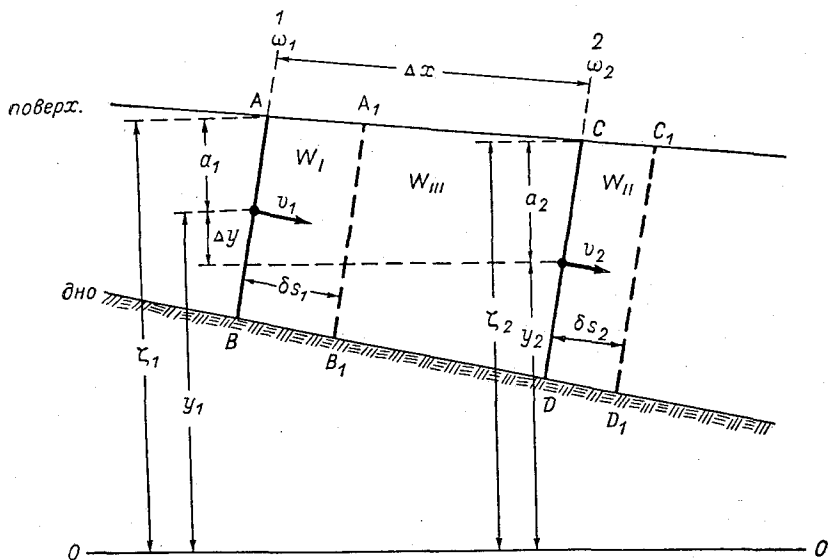


Рис. 6.1. Схема к выводу уравнения неравномерного движения открытого потока.

Выделим в потоке двумя сечениями AB и CD некоторый объем $ABCD$ (рис. 6.1). Этот объем за короткий промежуток времени Δt переместится и займет новое положение $A_1B_1C_1D_1$. Считаем, что перемещение жидкости в каждом профиле происходит со средней скоростью; при этом на профиле AB — со скоростью v_1 , а на профиле CD — со скоростью v_2 .

Перемещение первого профиля AB равно δs_1 , а перемещение второго профиля CD равно δs_2 , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \delta s_1 &= v_1 \Delta t; \\ \delta s_2 &= v_2 \Delta t. \end{aligned} \right\}$$

В силу условия неразрывности имеем

$$Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2. \quad (6.1)$$

В первом положении выделенный объем складывается из объемов W_I и W_{III} , во втором — из объемов W_{III} и W_{II} . Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} W_I &= \omega_1 \delta s_1; \\ W_{III} &= \omega_2 \delta s_2. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя сюда значения δs_1 и δs_2 и учитывая выражение (6.1), находим

$$\left. \begin{aligned} W_I &= \omega_1 v_1 \Delta t = Q \Delta t; \\ W_{III} &= \omega_2 v_2 \Delta t = Q \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

К исследованию движения выделенного объема применим закон живой силы, согласно которому изменение кинетической энергии, именуемой иначе живой силой тела, движущегося поступательно, за некоторый промежуток времени равно сумме работ приложенных сил на соответствующем перемещении; напомним, что живая сила (Ж. С.) выражается величиной $\frac{mv^2}{2}$, где m — масса тела.

Живая сила выделенного объема в первом и во втором положениях будет выражаться таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{I положение Ж. С.}_{ABCD} &= \text{Ж. С.}_I + \text{Ж. С.}_{III}; \\ \text{II положение Ж. С.}_{A_1B_1C_1D_1} &= \text{Ж. С.}_{II} + \text{Ж. С.}_{III}. \end{aligned} \right\}$$

Теперь легко найти изменение живой силы (изм. Ж. С.) выделенного объема $ABCD$ за время Δt

$$\text{Изм. Ж. С.} = (\text{Ж. С.}_{III} + \text{Ж. С.}_{II}) - (\text{Ж. С.}_I + \text{Ж. С.}_{III}).$$

Первый двучлен правой части равенства выражает последующее состояние, а второй — начальное состояние.

Произведя вычитание, получаем

$$\text{Изм. Ж. С.} = \text{Ж. С.}_{II} - \text{Ж. С.}_I, \quad (6.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \text{Ж. С.}_I &= m_1 \frac{v_1^2}{2}; \\ \text{Ж. С.}_{II} &= m_2 \frac{v_2^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Здесь m_1 — масса объема W_I , а m_2 — масса объема W_{II} , причём

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{\gamma}{g} W_I = \frac{\gamma}{g} Q \Delta t; \\ m_2 &= \frac{\gamma}{g} W_{II} = \frac{\gamma}{g} Q \Delta t. \end{aligned} \right\}$$

Видим, что m_1 и m_2 взаимно равны (это вытекает из условия неразрывности). Подставим равенство (6.4) в выражение (6.3) и введем туда значения m_1 и m_2 . В результате получим

$$\text{Изм. Ж. С.} = \frac{\gamma}{g} Q \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \Delta t. \quad (6.5)$$

Определим теперь работы всех сил, под влиянием которых произошло перемещение рассматриваемого объема. Обозначим работу силы тяжести через R_1 . Сила тяжести, действующая на тело, измеряется весом тела; найдем веса объемов W_I , W_{II} . Эти веса будут определяться соответственно произведениями γW_I и γW_{II} . Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \gamma W_I &= \gamma Q \Delta t; \\ \gamma W_{II} &= \gamma Q \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Работа, совершаемая телом при движении в поле силы тяжести, равна весу тела, умноженному на проекцию на вертикальную ось перемещения его центра тяжести. Работа силы тяжести при перемещении выделенного объема из положения $ABCD$ в положение $A_1B_1C_1D_1$ равна работе силы тяжести при перемещении объема W_I в положение W_{II} . Это становится понятным, если учесть, что перемещение объема W_{III} за время Δt равно нулю, вследствие чего и работа для этого объема оказывается равной нулю. Таким образом, можно написать

$$R_1 = \gamma Q \Delta t \Delta y, \quad (6.7)$$

где Δy — проекция указанного выше перемещения на вертикальную ось y . Из рисунка (6.1) видно, что

$$\Delta y = y_1 - y_2.$$

Ординаты y_1 и y_2 центров тяжести соответственно объемов W_I и W_{II} определим через отметки свободной поверхности ζ_1 и ζ_2 в сечениях I и II и значения глубины погружения центров тяжести a_1 и a_2 , т. е. напишем:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \zeta_1 - a_1; \\ y_2 &= \zeta_2 - a_2. \end{aligned} \right\}$$

Разность этих величин выразится в виде

$$\Delta y = (\zeta_1 - \zeta_2) - (a_1 - a_2).$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (6.7), записываем следующее окончательное выражение работы силы тяжести:

$$R_1 = \gamma Q \Delta t (\zeta_1 - \zeta_2) - \gamma Q \Delta t (a_1 - a_2). \quad (6.8)$$

Теперь напишем соотношение для работы гидродинамического давления

$$R_2 = p_1 \omega_1 \Delta s_1 - p_2 \omega_2 \Delta s_2.$$

Произведения $p_1 \omega_1$ и $p_2 \omega_2$ выражают здесь значения противоположно направленных сил давления соответственно на площади поперечного сечения потока ω_1 и ω_2 ; через p_1 и p_2 обозначены величины гидродинамического давления в центрах тяжести указанных сечений; Δs_1 и Δs_2 — перемещения за время Δt . Учитывая, что $\Delta s = v \Delta t$, запишем

$$R_2 = p_1 \omega_1 v_1 \Delta t - p_2 \omega_2 v_2 \Delta t.$$

Вводя в это равенство расход воды $Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$, получаем

$$R_2 = Q (p_1 - p_2) \Delta t. \quad (6.9)$$

Для нахождения p_1 и p_2 воспользуемся известным из гидростатики уравнением распределения давления по вертикали

$$p_1 = p_0 + \gamma a_1,$$

$$p_2 = p_0 + \gamma a_2.$$

Очевидно, что

$$p_1 - p_0 = \gamma (a_1 - a_2).$$

Окончательно получаем следующее выражение работы сил давления:

$$R_2 = \gamma Q (a_1 - a_2) \Delta t. \quad (6.10)$$

Найдем работу силы сопротивления R_3 . Запишем ее выражение таким образом:

$$R_3 = T \Delta s_{\text{ср}}, \quad (6.11)$$

где T — сила сопротивления, $\Delta s_{\text{ср}}$ — среднее перемещение, найденное из соотношения

$$\Delta s_{\text{ср}} = v_{\text{ср}} \Delta t = \frac{Q}{\omega_{\text{ср}}} \Delta t; \quad (6.12)$$

здесь $\omega_{\text{ср}}$ — средняя площадь поперечного сечения, определяемая как среднее арифметическое площадей начального и конечного поперечных сечений выделенного объема $ABCD$, т. е.

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2).$$

Учитывая, что поток является турбулентным, определим величину T таким образом:

$$T = -k_n \chi_{\text{ср}} \Delta x v_{\text{ср}}^2. \quad (6.13)$$

Здесь k_n — коэффициент пропорциональности для неравномерного движения, $\chi_{\text{ср}} \Delta x$ — поверхность трения ($\chi_{\text{ср}}$ — средний смоченный периметр, Δx — длина выделенного объема).

Как известно,

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\omega_{\text{ср}}}.$$

Теперь для работы силы трения можем написать

$$R_3 = -k_n \chi_{\text{ср}} \Delta x v_{\text{ср}}^2 \frac{Q}{\omega_{\text{ср}}} \Delta t. \quad (6.14)$$

Введем средний гидравлический радиус потока на рассматриваемом участке

$$\frac{\omega_{\text{ср}}}{\chi_{\text{ср}}} = R_{\text{ср}}.$$

По аналогии с равномерным движением принимаем следующее выражение коэффициента пропорциональности k_n :

$$k_n = \frac{\gamma}{C_n^2}. \quad (6.15)$$

Здесь C_n — коэффициент Шези для неравномерного движения. Значения коэффициента Шези C для равномерного и неравномерного движения в современной гидравлике принимаются одинаковыми, т. е. $C = C_n$, поэтому можно написать

$$k_n = \frac{\gamma}{C^2}. \quad (6.15')$$

Приходим к такому равенству:

$$R_3 = -\gamma Q \Delta t \frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 R_{\text{ср}}} \Delta x. \quad (6.16)$$

Посмотрим, какую размерность имеет величина $\frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 R_{\text{ср}}} \Delta x$:

$$\left| \frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 R_{\text{ср}}} \Delta x \right| = \frac{\frac{m^2}{сек^2} m}{\frac{m}{сек^2} m} = m.$$

Получили, что она имеет линейную размерность; введем для ее обозначения специальный символ Δh_w , т. е. положим

$$\Delta h_w = \frac{v_{cp}^2}{C^2 R_{cp}} \Delta x. \quad (6.17)$$

Величина Δh_w называется потерей напора потока на пути Δx . Теперь будем иметь следующее выражение работы силы сопротивления:

$$R_3 = -\gamma Q \Delta t \Delta h_w. \quad (6.18)$$

Переходим к основной задаче, т. е. к составлению уравнения живых сил. Левую часть уравнения образует выражение (6.5), а правую — сумма величин R_1 , R_2 , R_3 .

Вводя символическое обозначение разности Δ , напишем выражение изменения живой силы следующим образом:

$$\text{Изм. Ж. С.} = \gamma Q \Delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) \Delta t. \quad (6.19)$$

Эта запись предполагает, что

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Составляем уравнение живых сил

$$\begin{aligned} \gamma Q \Delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) \Delta t &= \gamma Q \Delta t (\zeta_1 - \zeta_2) - \gamma Q \Delta t (a_1 - a_2) + \\ &+ \gamma Q \Delta t (a_1 - a_2) - \gamma Q \Delta t \Delta h_w. \end{aligned}$$

Приведение подобных и сокращение уравнения на $\gamma Q \Delta t$ позволяет получить

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) = -\Delta \zeta - \Delta h_w; \quad (6.20)$$

здесь принято

$$\Delta \zeta = \zeta_2 - \zeta_1.$$

Разделим уравнение (6.20) на длину выделенной части потока Δx

$$\frac{\Delta \left(\frac{v^2}{2g} \right)}{\Delta x} = -\frac{\Delta \zeta}{\Delta x} - \frac{\Delta h_w}{\Delta x}. \quad (6.21)$$

Получили запись уравнения неравномерного движения в форме конечных разностей. Если уменьшим Δx до бесконечно малой

величины, т. е. примем $\Delta x \rightarrow dx$, то придем к дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = - \frac{d\zeta}{dx} - \frac{dh_w}{dx}. \quad (6.22)$$

Первый член правой части уравнения выражает уклон свободной поверхности I

$$I = - \frac{d\zeta}{dx}. \quad (6.23)$$

Учитывая приведенное выше выражение Δh_w , запишем следующее равенство для производной h_w по x :

$$\frac{dh_w}{dx} = \frac{v_{cp}^2}{C^2 R}. \quad (6.24)$$

Индекс «ср» при R здесь опущен, так как при бесконечно близком расположении поперечников 1 и 2 (при $\Delta x \rightarrow dx$) величина R_{cp} совпадает с R . В уравнении (6.24) v_{cp} выражает среднюю скорость в поперечном сечении потока.

Подставляя равенство (6.24) в (6.22), записываем уравнение неравномерного движения следующим образом:

$$I = \frac{d}{dx} \left(\frac{v_{cp}^2}{2g} \right) + \frac{v_{cp}^2}{C^2 R}. \quad (6.25)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением равномерного движения (глава III), видим, что оно отличается от последнего наличием члена, учитывающего изменение живой силы по длине

потока, т. е. $\frac{d}{dx} \left(\frac{v_{cp}^2}{2g} \right)$. При равномерном движении $\frac{dv}{dx} = 0$,

поэтому и указанный член в уравнении равномерного движения равен нулю.

§ 2. Уравнение неравномерного движения жидкости в трубе

Неравномерное движение жидкости в трубе имеет место в том случае, если вдоль продольной оси x изменяется поперечное сечение трубы ω , т. е. имеет место условие $\frac{d\omega}{dx} \neq 0$. При этом замедленное течение наблюдается на участке расширения трубы, именуемом диффузором, а ускоренное — на участке сужения, именуемом конфузоре (рис. 6.2).

Уравнение неравномерного движения для напорного потока, протекающего в трубе, может быть выведено так же, как и уравнение неравномерного движения открытого потока, но только

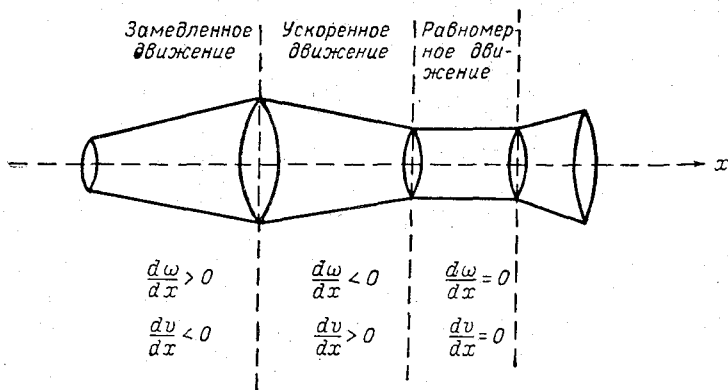


Рис. 6.2. Пример участка трубы с неравномерным движением жидкости.

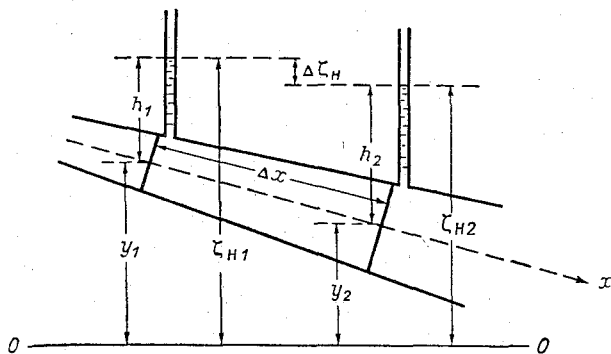


Рис. 6.3. Схема к выводу уравнения неравномерного движения в трубе.

силы давления будут определяться не высотами a_1 и a_2 , а высотами h_1 и h_2 (рис. 6.3), т. е. должен быть учтен напор.

Сохраняя обозначения предыдущего вывода, будем иметь следующие выражения работ действующих сил:
 работа силы тяжести

$$R_1 = \gamma Q \Delta t (y_1 - y_2), \quad (6.26)$$

работа сил давления

$$R_2 = \gamma Q \Delta t (h_1 - h_2), \quad (6.27)$$

работа силы сопротивления

$$R_3 = -\gamma Q \Delta t \Delta h_w. \quad (6.28)$$

Составляем уравнение живых сил

$$\frac{\gamma}{g} Q \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \Delta t = \gamma Q \Delta t (h_1 - h_2 + y_1 - y_2 - \Delta h_w). \quad (6.29)$$

Сокращая на $\gamma Q \Delta t$ и преобразуя, находим

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = (h_1 + y_1) - (h_2 + y_2) - \Delta h_w. \quad (6.30)$$

Суммы, взятые в скобки, выражают пьезометрический напор $\zeta_{н}$ соответственно в сечениях 1 и 2, т. е.

$$\zeta_{н1} = h_1 + y_1; \quad \zeta_{н2} = h_2 + y_2.$$

Теперь уравнение (6.30) можно написать так:

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \zeta_{н1} - \zeta_{н2} - \Delta h_w.$$

Разность пьезометрических напоров обозначим через $\Delta \zeta_{н}$, т. е. примем

$$\Delta \zeta_{н} = \zeta_{н1} - \zeta_{н2}.$$

Деля уравнение на Δx и переходя к бесконечно малым, будем иметь

$$\frac{d \left(\frac{v^2}{2g} \right)}{dx} = - \frac{d\zeta_{н}}{dx} - \frac{dh_w}{dx}. \quad (6.31)$$

Потери напора на единицу длины можно выразить через квадрат скорости, коэффициент C и гидравлический радиус, т. е. можно, как и прежде, написать

$$\frac{dh_w}{dx} = \frac{v_{ср}^2}{C^2 R} = \frac{v_{ср}^2}{C^2 \frac{r}{2}}, \quad (6.32)$$

где r — радиус трубы, $\frac{r}{2} = R$ — гидравлический радиус.

Уравнение неравномерного движения приводится к виду

$$I_{п} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R} \quad (6.33)$$

(знак осреднения при скорости опущен). Здесь введено понятие пьезометрического уклона, который обозначен через $I_{п}$, причем принято

$$I_{п} = - \frac{d\zeta_{н}}{dx}.$$

Вернемся к уравнению (6.31) и запишем его так:

$$\frac{v_2^2}{2g} + h_2 + y_2 = \frac{v_1^2}{2g} + h_1 + y_1 - \Delta h_w.$$

Размерность первого члена этого уравнения линейная, т. е.

$$\left| \frac{v^2}{2g} \right| = \frac{\frac{м^2}{сек^2}}{\frac{м}{сек^2}} = м.$$

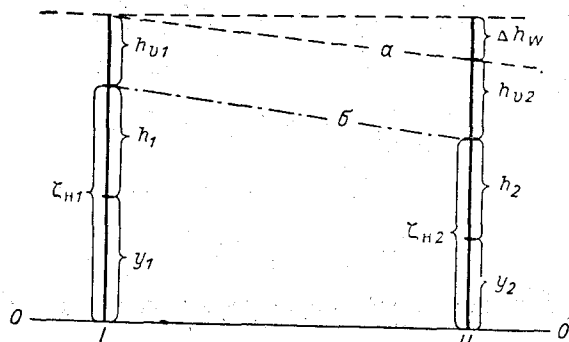


Рис. 6.4. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли.

y — высота положения, h — пьезометрическая высота, h_v — скоростной напор, z_{H} — пьезометрический напор, Δh_w — потеря напора, a — линия потери напора, b — линия пьезометрического напора.

Такова же размерность и других членов уравнения.

Введем обозначение

$$h_v = \frac{v^2}{2g}.$$

Эта величина называется скоростным напором. Уравнение неравномерного движения принимает вид

$$h_{v_2} + h_2 + y_2 = h_{v_1} + h_1 + y_1 - \Delta h_w, \quad (6.34)$$

или

$$h_{v_2} + z_2 = h_{v_1} + z_1 - \Delta h_w.$$

Такая запись позволяет интерпретировать уравнение неравномерного движения геометрически. Эта интерпретация наглядно показана на рис. 6.4.

Уравнение (6.34) может быть записано и так:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 - \Delta h_w.$$

Это уравнение носит название уравнения Бернулли.

§ 3. Корректив распределения скорости в уравнении неравномерного движения

Весь поток условно можно разделить на отдельные струйки, и для каждой из них составить уравнение движения, применяя те же рассуждения, которые были использованы при выводе

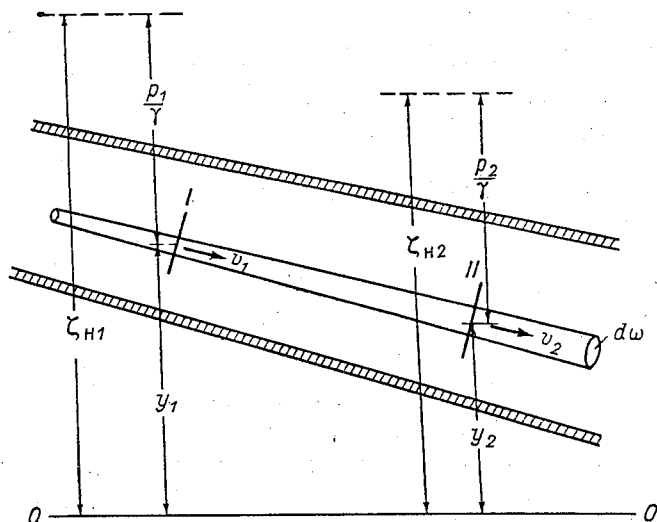


Рис. 6.5.

уравнения неравномерного движения для целого потока. Полученное при этом уравнение неравномерного движения элементарной струйки будет иметь такой же вид, как и уравнение неравномерного движения целого потока.

Разделим изображенный на рис. 6.5 поток, протекающий в трубе, на элементарные струйки с поперечным сечением $d\omega$ каждая. Запишем для одной из таких струек уравнение Бернулли, пренебрегая потерей напора Δh_w

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_{н1} = \frac{v_2^2}{2g} + z_{н2} = \text{const.} \quad (6.35)$$

Каждая из струек в каком-либо фиксированном поперечном сечении будет обладать особой продольной скоростью v . В общем виде будем иметь

$$\frac{v^2}{2g} + \zeta_n = \text{const.} \quad (6.36)$$

Расход вдоль элементарной струйки является величиной постоянной, т. е.

$$v d\omega = dQ = \text{const.}$$

Произведение двух постоянных дает постоянную. Таким образом, умножая первый член уравнения (6.36) на $vd\omega$, а второй член на dQ , будем иметь

$$\frac{v^3}{2g} d\omega + \zeta_n dQ = \text{const.} \quad (6.37)$$

Теперь проинтегрируем уравнение (6.37) по сечению всего потока ω и получим

$$\frac{1}{2g} \int_{\omega} v^3 d\omega + \zeta_n Q = \text{const.}$$

Заменим величину Q равным ей произведением $v_{\text{ср}}\omega$ и разделим все уравнение на это произведение

$$\frac{1}{2g} \cdot \frac{\int_{\omega} v^3 d\omega}{v_{\text{ср}}\omega} + \zeta_n = \text{const.} \quad (6.38)$$

Итак, исходя из уравнения для отдельной струйки, мы получили уравнение Бернулли для целого потока (в форме, не учитывая потерю на трение).

Вспоминая полученное ранее уравнение для целого потока, замечаем, что при условии $\Delta h_w \cong 0$ это уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} + \zeta_n = \text{const.} \quad (6.39)$$

Уравнение (6.38) является более точным, чем уравнение (6.39), так как оно выведено с учетом различия скоростей по сечению трубы; это уравнение вместо величины $v_{\text{ср}}^2$ содержит дробь

$\frac{\int v^3 d\omega}{\omega v_{\text{ср}}}$. Такое уточнение в уравнение неравномерного движения внес Кориолис.

Если первый член уравнения (6.38) умножить и разделить на v_{cp}^2 , то получим

$$\frac{\alpha v_{cp}^2}{2g} + \zeta_n = \text{const}, \quad (6.40)$$

где принято

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} v^3 d\omega}{v_{cp}^3 \omega}. \quad (6.41)$$

Заметим, что $\frac{1}{\omega} \int_{\omega} v^3 d\omega$ есть не что иное, как среднее от куба скорости, т. е.

$$(v^3)_{cp} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} v^3 d\omega.$$

Таким образом, отношение (6.41) может быть записано в виде

$$\alpha = \frac{(v^3)_{cp}}{(v_{cp})^3}.$$

Коэффициент α называют коррективом распределения скорости, или коррективом Кориолиса; он учитывает различие живой силы, вычисленной при учете различия скоростей по сечению потока и при пренебрежении этим различием. Коэффициент Кориолиса α определяется по формуле (6.41), исходя из заданного характера распределения скорости в поперечном сечении. Численное значение этой величины для открытых потоков обычно получается близким к 1,1. В практике расчетов часто принимают $\alpha=1$. Заметим, что корректив скорости α используется также при вычислении живой силы равномерного потока.

С учетом корректива α уравнение неравномерного движения для целого потока следует записать так:

$$\frac{\alpha v_{cp2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 = \frac{\alpha v_{cp1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 - \Delta h_w. \quad (6.42)$$

Или в ином виде:
для открытого потока

$$I = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{dv_{cp}^2}{dx} + \frac{v_{cp}^2}{C^2 R}, \quad (6.43)$$

где I — уклон свободной поверхности;
для напорного потока

$$I_n = \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{dv_{cp}^2}{dx} + \frac{v_{cp}^2}{C^2 R}, \quad (6.44)$$

где I_n — пьезометрический уклон.

§ 4. Вывод уравнения неравномерного движения из общих дифференциальных уравнений турбулентного потока

Общие дифференциальные уравнения движения турбулентного потока могут быть применены к частным случаям движения и использованы для получения расчетных зависимостей, отвечающих этим случаям.

Рассмотрим установившееся неравномерное движение жидкости в открытом канале и учтем все те ограничения, которые накладывались на движение в предыдущих параграфах настоящей главы, т. е. примем, что поток является весьма широким и прямолинейным, с плавным изменением его поперечного сечения вдоль продольной оси x , которая предполагается расположенной на свободной поверхности и направленной вдоль течения. Ось y будем считать вертикальной и направленной вниз, а ось z горизонтальной и направленной к одному из берегов потока. Пренебрегаем для рассматриваемого прямолинейного потока поперечными скоростями, которые в этом случае действительно близки к нулю. Принятые ограничения позволяют написать первый член уравнения в проекции на ось x таким образом:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.45)$$

В указанном уравнении член, учитывающий изменение давления по оси x , равен нулю, ускорение массовых сил X записывается в виде

$$X = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (6.46)$$

где ζ — вспомогательная ордината, выражающая высоту (отметку) свободной поверхности потока над горизонтальной плоскостью сравнения на вертикали с абсциссой x . Знак минус поставлен потому, что проекция ускорения силы тяжести $g \frac{\partial r}{\partial x}$ на ось x оказывается совпадающей с положительным направлением оси x в том случае, когда производная $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ отрицательна, т. е. когда уровень свободной поверхности снижается в направлении течения. Будем считать, что для рассматриваемого участка потока может быть использовано одно — среднее значение коэффициента турбулентного обмена $A_{\text{ср}}$. Учитывая далее, что поток является плавно изменяющимся вдоль оси x и весьма широким, будем пренебрегать вторыми производными скорости по продольной оси x и по поперечной оси z .

Общее уравнение движения в проекции на ось x приводится к виду

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} A_{\text{ср}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6.47)$$

При взятых ограничениях относительно характера потока и принятом расположении координатных осей уравнение в проекции на ось z превращается тождественно в нуль, а уравнение в проекции на ось y — в уравнение гидростатики и при анализе движения может не учитываться. Необходимое для этой цели уравнение (6.47) после преобразования записывается так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = I + \frac{A_{\text{ср}}}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (6.48)$$

где

$$I = - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (6.49)$$

представляет собой продольный уклон свободной поверхности.

Уравнение (6.48) необходимо проинтегрировать по вертикали потока. Предварительно заметим, что в данном случае мы будем принимать в отношении инерционного члена уравнения, т. е.

величины $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$, то же предположение, которое неявно

содержалось в выводе уравнения неравномерного движения, рассмотренном в § 1 настоящей главы. Это предположение сводится к принятию условия о приближенном постоянстве вели-

чины $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$ по вертикальной оси y . В действительности эта

величина меняется по вертикали, что при уточненном выводе уравнения может быть учтено, однако в данном случае имеется в виду получить решение приближенное.

Заменяя в рассматриваемом члене уравнения действительную скорость средней по вертикали скоростью, напомним

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_1 v_{\text{ср}}^2}{2g} \right), \text{ где}$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^H v^2 dy}{H v_{\text{ср}}^2}; \quad (6.50)$$

здесь α_1 — корректив в уравнении количества движения, учитывающий распределение скорости по вертикали.

Записываем теперь уравнение (6.48) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_1 v_{\text{ср}}^2}{2g} \right) = I + \frac{A_{\text{ср}}}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6.51)$$

Выполняем интегрирование:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_1 v_{\text{ср}}^2}{2g} \right) \int_0^H dy = I \int_0^H dy + \frac{A_{\text{ср}}}{\gamma} \int_0^H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy. \quad (6.52)$$

Интеграл последнего члена выражения (6.52) можно представить в виде

$$\int_0^H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy = \int_{D_1}^{D_2} d \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

где пределы интегрирования отвечают значениям производной $\frac{\partial v}{\partial y}$ у поверхности (при $y=0$) $D_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 = 0$ и у дна (при $y=H$) $D_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_H$. Приняв коэффициент турбулентного обмена постоянным по вертикали, считаем, что распределение скорости подчиняется формуле Базена, согласно которой

$$D_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_H = - \frac{2mv_{\text{ср}}}{CH}.$$

Учитывая это равенство при нахождении определенных интегралов уравнения (6.52), пишем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_1 v_{\text{ср}}^2}{2g} \right) H = IH - \frac{A_{\text{ср}} 2mv_{\text{ср}}}{\gamma CH}.$$

Подставляя значение $A_{\text{ср}}$ по формуле

$$A_{\text{ср}} = \frac{\gamma H v_{\text{ср}}}{2mC},$$

деля уравнение на H и вынося из под знака производной постоянные величины, получаем

$$I = \frac{\alpha_1}{2g} \cdot \frac{dv_{\text{ср}}^2}{dx} + \frac{v_{\text{ср}}^2}{HC^2}. \quad (6.53)$$

Здесь вместо частной написана полная производная, которая в рассматриваемом случае совпадает с ней. Выведенное уравнение отличается от уравнения (6.43) только тем, что вместо гидравлического радиуса R содержит среднюю глубину потока H , а вместо корректива α корректив α_1 . Для широких потоков и, в частности, для рек $R \cong H$. Корректив α_1 , так же как и α , близок к единице.

Из уравнения В. М. Маккавеева можно получить уравнение неравномерного движения не только для всего потока, каковым

является (6.53), но и уравнение неравномерного движения элементарной струйки. Рассматривая струйку в широком плавно изменяющемся потоке, воспользуемся равенством (6.47). Деля это равенство на g и вводя скорость, содержащуюся в первом члене уравнения, под знак производной, умножая все выражение на dx , записываем

$$d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -d\zeta + \frac{A_{cp}}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx. \quad (6.54)$$

Относя уравнение к конечному расстоянию Δx , переписываем его следующим образом:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 - \zeta_2 + \frac{A_{cp}}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Delta x,$$

или

$$\frac{v_2^2}{2g} + \zeta_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_1 - \Delta h_w, \quad (6.55)$$

где

$$\Delta h_w = -\frac{A_{cp}}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Delta x. \quad (6.56)$$

Применение общего уравнения турбулентного движения к рассматриваемому случаю установившегося неравномерного плавно изменяющегося потока, протекающего в прямом широком русле, позволило получить выражение члена, учитывающего потери напора в уравнении неравномерного движения для элементарной струйки. Выяснилось, что он зависит от коэффициента турбулентного обмена и от распределения скорости в потоке.

Глава VII

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ОТКРЫТОГО ПОТОКА

§ 1. Удельная энергия сечения и критическая глубина

Ниже в изложении будет встречаться понятие нормальной глубины потока. Нормальной глубиной (которая обозначается через h_0) называется такая глубина, при которой поток имеет равномерный режим. Напомним, что при равномерном течении поверхностный уклон потока I равен уклону дна i , т. е. $I = i$.

При замедленном течении кривая свободной поверхности носит название кривой подпора: глубина возрастает в направлении течения, а поверхностный уклон меньше уклона дна ($I < i$).

При ускоренном течении ($I > i$) кривая свободной поверхности называется кривой спада, глубина убывает вдоль течения. Примеры случаев замедленного и ускоренного течения изображены на рис. 7.1.

Обратимся к рассмотренному в главе VI уравнению Бернулли. Введем следующее обозначение:

$$E = \frac{\alpha v_{\text{ср}}^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + y. \quad (7.1)$$

Очевидно, что указанное уравнение запишется в виде

$$E_2 = E_1 - \Delta h_w \quad (7.2)$$

или

$$E_2 - E_1 + \Delta h_w = 0,$$

где E_1 и E_2 — средняя удельная энергия потока соответственно в первом и во втором сечениях.

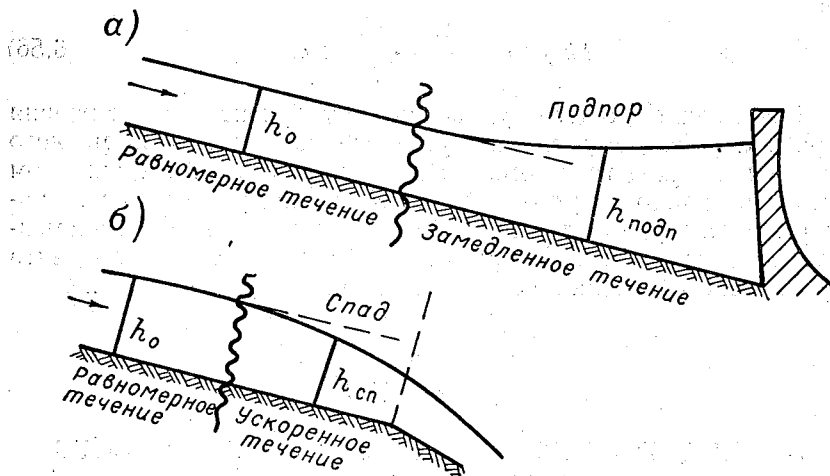


Рис. 7.1. Примеры кривой подпора (а) и кривой спада (б).

Из уравнения (7.2) видно, что удельная энергия потока всегда уменьшается вниз по течению за счет потери на сопротивление. Потеря энергии равна потере напора. В гидравлике при количественной оценке гидродинамического сопротивления часто говорят именно о потерях энергии.

Запишем удельную энергию потока таким образом:

$$E = y + \frac{p_0}{\gamma} + h + \frac{\alpha v_{\text{ср}}^2}{2g}. \quad (7.3)$$

Эта запись понятна, так как $p = p_0 + \gamma h$, откуда

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h,$$

где h — наибольшая глубина потока в сечении (рис. 7.2).

Сумма последних двух членов уравнения (7.3) определяет удельную энергию сечения, обозначаемую через \mathcal{E} .

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha v_{\text{ср}}^2}{2g}. \quad (7.4)$$

Первый член правой части выражения (7.4) определяет удельную потенциальную энергию сечения \mathcal{E}_Π относительно нижней точки дна русла, а второй — удельную кинетическую энергию \mathcal{E}_κ сечения.

Можно написать

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Pi + \mathcal{E}_\kappa,$$

где

$$\mathcal{E}_\Pi = h;$$

$$\mathcal{E}_\kappa = \frac{\alpha v^2}{2g}.$$

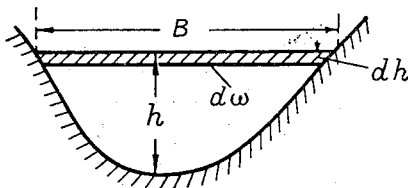


Рис. 7.2.

При равномерном движении величины h и $v_{\text{ср}}$ вдоль потока не изменяются, т. е. $h = \text{const}$ и $v_{\text{ср}} = \text{const}$, поэтому ясно, что при равномерном движении удельная энергия сечения вдоль потока не изменяется, т. е. $\mathcal{E} = \text{const}$.

Учитывая, что $v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\omega}$, пишем

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g} \cdot \frac{1}{\omega^2}. \quad (7.5)$$

Если расход потока задан и остается постоянным по его длине и во времени, то

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} = \text{const}.$$

Построим график величины \mathcal{E} как функции глубины h . Заметим, что в принятой схеме (когда плоскость сравнения проходит через нижнюю точку русла) h выражает не только глубину, но и высотную отметку водной поверхности (рис. 7.3). Как показано на рисунке, функция $\mathcal{E}(h)$ имеет минимум. Надо найти этот минимум, но предварительно следует доказать такое равенство:

$$\frac{d\omega}{dh} = B. \quad (7.6)$$

Для этого обратимся к рис. 7.2, на котором видно, что

$$d\omega = B dh,$$

а это и есть подтверждение равенства (7.6).

Чтобы найти экстремальное значение функции $\mathcal{E}(h)$ по уравнению (7.5) (в данном случае минимум), надо продифференцировать функцию и приравнять производную нулю. Находим производную

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{\omega^3} \right) \frac{d\omega}{dh}, \quad (7.7)$$

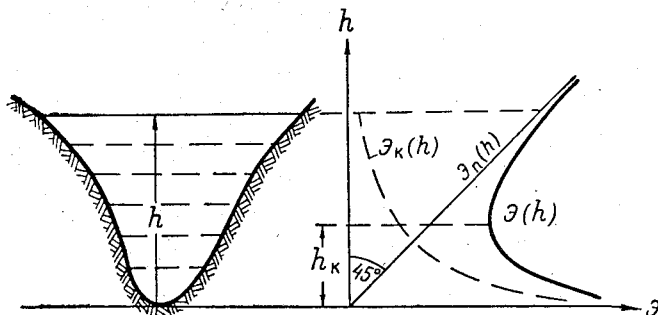


Рис. 7.3. График удельной энергии сечения потока.

для точки \min приравниваем ее нулю

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3} = 0. \quad (7.8)$$

Закключаем, что в точке \min имеет место равенство

$$\frac{\omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}. \quad (7.9)$$

По этой формуле для русла любого поперечного сечения можно найти глубину, при которой удельная энергия сечения имеет минимум. Такая глубина называется критической и обозначается h_k ; эта величина показана на рис. 7.3.

§ 2. Спокойное и бурное течение. Критическое состояние потока

При равномерном режиме и разных уклонах дна заданный расход будет проходить при различном заполнении русла и будут иметь место различные соотношения между величинами потенциальной и кинетической энергии.

Состояние потока, протекающего при минимуме удельной энергии сечения, называется критическим. Если при критическом

состоянии поток имеет равномерный режим, то его уклон и глубина будут критическими. В этом случае нормальная глубина потока равна критической глубине. Критическое состояние разграничивает два режима течения: спокойный и бурный.

Если поток имеет уклон дна $i < i_k$, то его нормальная глубина $h_0 > h_k$, режим течения спокойный; если $i = i_k$, то $h_0 = h_k$ — состояние потока критическое, при $i > i_k$ $h_0 < h_k$ — течение бурное.

При спокойном режиме течения поток имеет относительно большой запас потенциальной энергии и малый запас кинетической энергии. При критическом состоянии потока кинетическая энергия равна половине потенциальной энергии. При бурном режиме течения запас потенциальной энергии относительно мал, а запас кинетической энергии велик.

Характеристика режимов течения рассматривалась уже выше. Напомним, что при спокойном течении имеет место спокойное обтекание препятствий и сравнительно ровная поверхность воды. Бурное течение характеризуется весьма неровной свободной поверхностью, наличием на ней гидравлических прыжков, возникающих перед препятствиями.

У равномерного потока, имеющего критическое состояние, уклон свободной поверхности I равен уклону дна, т. е. $I = i_k$.

В то же время $\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$. На основании уравнения неравномерного движения для рассматриваемого частного случая имеем

$$i_k = \frac{v_k^2}{C_k^2 R_k} = \frac{Q_k^2}{C_k^2 \omega_k^2 R_k}, \quad (7.10)$$

где все величины оказываются отвечающими критическому режиму, и поэтому они помечены индексом «к».

Значение критического расхода определяем по формуле (7.9), согласно которой

$$Q_k^2 = \frac{g \omega_k^3}{\alpha B_k}. \quad (7.11)$$

Подставляя это значение в предыдущее равенство и учитывая выражение гидравлического радиуса R , находим следующую формулу для критического уклона:

$$i_k = \frac{g \chi_k}{\alpha C_k^2 B_k}, \quad (7.12)$$

где χ — смоченный периметр.

Найдем критерий спокойного и бурного режимов течения. Запишем выведенную выше для критического состояния формулу (7.9) следующим образом:

$$\frac{\alpha}{g} \cdot \frac{B}{\omega} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} = 1.$$

Вместо дроби $\frac{Q^2}{\omega^2}$ подставим квадрат средней скорости $v_{\text{ср}}^2$, а вместо частного от деления ω на B среднюю глубину H . В результате получим

$$\frac{\alpha v_{\text{ср}}^2}{gH} = 1. \quad (7.13)$$

Левая часть этого равенства есть не что иное, как число Фруда, записанное с коррективом α .

Если отнести наши рассуждения к потоку, протекающему в прямоугольном русле, в котором максимальная глубина h совпадает со средней, то приходим к заключению, что число F_r выражает отношение удвоенной кинетической энергии потока к его потенциальной энергии, определяемой в рассматриваемом случае величиной H .

Если принять $\alpha \cong 1$, то будем иметь обычную запись числа F_r .

Итак, при критическом состоянии потока $F_r = 1$, при спокойном режиме $F_r < 1$, при бурном $F_r > 1$.

§ 3. Преобразование уравнения неравномерного движения потока в призматическом русле

Запишем уравнение неравномерного движения следующим образом:

$$\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} \right) = I - \frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 R}. \quad (7.14)$$

Будем рассматривать призматическое русло с постоянным уклоном. Вспомним, что призматическим руслом называется такое русло, которое вдоль продольной оси x не меняет ни размера, ни формы поперечного сечения. Изменения площади живого сечения потока обусловлены при этом различием глубины вдоль оси x , что связано в свою очередь с неравномерностью режима: наличием подпора или спада.

Выразим поверхностный уклон I через уклон дна и производную глубины по x (рис. 7.4); пусть отметка свободной поверхности ζ выражается равенством $\zeta = \zeta_{\text{д}} + h$, где $\zeta_{\text{д}}$ — отметка дна.

Уклон водной поверхности при этом определится следующим образом:

$$I = -\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{d}{dx}(\zeta_n + h),$$

или

$$I = i - \frac{dh}{dx}, \quad (7.15)$$

где уклон дна

$$i = -\frac{d\zeta_n}{dx}.$$

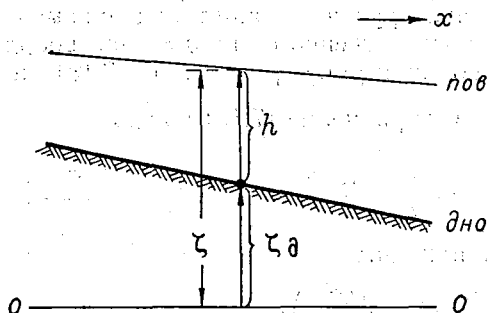


Рис. 7.4.

Преобразуем первый член уравнения (7.14).

$$\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v_{cp}^2}{2g} \right) = \frac{\alpha v_{cp}}{g} \cdot \frac{dv_{cp}}{dx}.$$

Учитывая, что $Q = \text{const}$ и выражая скорость через частное расхода и площади поперечного сечения ω , запишем

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v_{cp}^2}{2g} \right) &= \frac{\alpha Q}{g\omega} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{\omega} \right) = \\ &= \frac{\alpha Q^2}{g\omega} \left(-\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dx} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \cdot \frac{d\omega}{dx}. \end{aligned}$$

Уравнение (7.14) приводится к виду

$$-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \cdot \frac{d\omega}{dx} = i - \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{C^2\omega^2R}. \quad (7.16)$$

Вводим модуль расхода K , определяемый равенством

$$K = C\omega \sqrt{R}. \quad (7.17)$$

Учитываем, кроме того, что для призматического русла производная площади сечения потока по длине может быть представлена в виде

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}. \quad (7.18)$$

Заметим, что вообще при любой форме русла

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial x},$$

для призматического русла $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$. Поэтому и получаем выражение (7.18), которое показывает, что изменение площади сечения призматического русла связано только с изменением глубины и не зависит непосредственно от продольной координаты x .

Принимая во внимание равенство (7.18) и соотношение $\frac{d\omega}{dh} = B$, приводим уравнение (7.16) к виду

$$-\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B \frac{dh}{dx} = i - \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{K^2}.$$

Преобразуя, находим

$$\left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}\right) \frac{dh}{dx} = i - \frac{Q^2}{K^2}. \quad (7.19)$$

Окончательно получаем следующее уравнение установившегося неравномерного движения потока в призматическом русле:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}}. \quad (7.20)$$

§ 4. Формы свободной поверхности потока при неравномерном движении жидкости

Рассмотрим формы кривых свободной поверхности потоков при неравномерном движении жидкости в призматическом русле. Воспользуемся выведенным в предыдущем параграфе уравнением (7.20). Одновременно будем пользоваться и уравнением производной удельной энергии, записанным в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}. \quad (7.21)$$

Замечаем, что выражение (7.21) совпадает со знаменателем уравнения (7.20). Составим таблицу алгебраических знаков знаменателя уравнения (7.20) (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Знаки (\pm) производной удельной энергии и знаменателя правой части уравнения неравномерного движения в призматическом русле (7.20) и (7.25)

Глубина потока h	Состояние потока	Знак производной $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h}$	Знак знаменателя уравнения
$h > h_k$	Спокойное	+	+
$h = h_k$	Критическое	0	0
$h < h_k$	Бурное	-	-

Исследуем поток с постоянным заданным расходом Q . Выразим этот расход через уклон дна i и модуль расхода, отвечающий равномерному движению потока при заданном расходе (обозначим этот модуль через K_0), т. е. запишем

$$Q = K_0 \sqrt{i}. \quad (7.22)$$

Подставив равенство (7.22) в уравнение (7.20), получим

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i \left[1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 \right]}{1 - \frac{\alpha Bi K_0^2}{g \omega^3}}. \quad (7.23)$$

В знаменатель этого уравнения надо ввести модуль расхода, отвечающий состоянию потока при неравномерном режиме. В связи с этим преобразуем второй член знаменателя следующим образом:

$$\frac{\alpha Bi K_0^2}{g \omega^3} = \frac{\alpha Bi K_0^2 C^2}{g \frac{\omega}{\chi} \omega^2 C^2 \chi} = \frac{\alpha BC^2 i K_0^2}{g R \omega^2 C^2 \chi} = \frac{\alpha BC^2 i K_0^2}{g \chi K^2}.$$

Введем обозначение

$$\frac{\alpha BC^2 i}{g \chi} = j.$$

Теперь можно написать

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2}{1 - j \left(\frac{K_0}{K} \right)^2}. \quad (7.24)$$

Умножая числитель и знаменатель на K^2 , получим следующий вид уравнения:

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{K^2 - K_0^2}{K^2 - jK_0^2}. \quad (7.25)$$

Поскольку знаменатель уравнения умножен на положительную величину, правило знаков знаменателя не меняется и отвечает табл. 7.1.

Ниже рассматриваются основные случаи кривых свободной поверхности.

А. Поток с прямым уклоном дна ($i > 0$)

Первый случай. Нормальная глубина больше критической, т. е. $h_0 > h_k$ (рис. 7.5). Имеются три зоны: *a*, *b* и *c*.

Зона *a*. Глубина потока $h > h_0$, течение спокойное. Знаменатель уравнения (7.25) положительный, так как $h > h_0 > h_k$

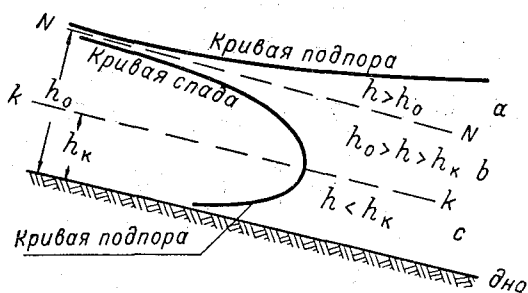


Рис. 7.5. Формы кривых свободной поверхности при прямом уклоне дна ($i > 0$) и $h_0 > h_k$.

(табл. 7.1). Числитель уравнения также положительный, потому что $h > h_0$ и $K > K_0$. Уклон дна i положительный. Таким образом, и производная $\frac{dh}{dx} > 0$, т. е. положительна. Следовательно, глубина вдоль потока растет (имеем кривую подпора). Результат произведенного анализа сведен в табл. 7.2.

Изучим теперь форму водной поверхности, отвечающую данному случаю. Если h стремится к h_0 (будем писать $h \rightarrow h_0$), то и $K \rightarrow K_0$, знаменатель положительный, числитель уравнения (7.25) и величина $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$.

Таким образом, глубина начиная от некоторой точки становится практически неизменной, а уклон водной поверхности приближается к уклону дна, кривая свободной поверхности асимпто-

Исследование форм кривых свободной поверхности. Прямой уклон дна ($i > 0$)

Случай	h_0	Зона	Глубина	Знак (\pm)				Состояние потока
				знаменателя (по табл. 7.1)	числителя	дроби	$\frac{dh}{dx}$	
1	$h_0 > h_k$	a	$h > h_0$	+	+	+	+	Подпор
	$h_0 > h_k$	b	$h_k < h < h_0$	+	-	-	-	Спад
	$h_0 > h_k$	c	$h < h_k$	-	-	+	+	Подпор
2	$h_0 < h_k$	a	$h > h_k$	+	+	+	+	Подпор
	$h_0 < h_k$	b	$h_0 < h < h_k$	-	+	-	-	Спад
	$h_0 < h_k$	c	$h < h_0$	-	-	+	+	Подпор
3	$h = h_k$	a	$h > h_0 = h_k$	+	+	+	+	Подпор
	$h = h_k$	c	$h < h_0 = h_k$	-	-	+	+	"

тически приближается к линии NN . Указанная точка отвечает месту выклинивания подпора. При очень больших h получаем очень большие K , по сравнению с которыми K_0 и jK_0 оказываются пренебрежимо малыми. Дробь правой части уравнения (7.25)

становится равной единице и $\frac{dh}{dx} = i$, т. е. глубина изменяется

в соответствии с уклоном дна. Это возможно только при горизонтальной свободной поверхности. Таким образом, в нижней части кривая асимптотически приближается к горизонтальной прямой. Полученный результат позволяет изобразить кривую подпора в зоне a так, как это сделано на рис. 7.5.

Зона b . В ней $h_k < h < h_0$. Заполняем табл. 7.2. Знаменатель уравнения (7.25) положителен потому, что $h > h_k$. Однако $h < h_0$, в связи с чем и $K < K_0$, поэтому числитель уравнения отрицателен (имеем кривую спада).

Изучим форму этой кривой. При $h \rightarrow h_0$, $K \rightarrow K_0$ числитель превращается в нуль и кривая стремится к линии NN . При $h = h_k$

знаменатель равен нулю, а поэтому $\frac{dh}{dx} = \infty$. Кривая подходит по нормали к линии kk . Изобразим эту кривую на рис. 7.5. В зоне b кривая спада, приближаясь к линии kk , увеличивает свою кривизну и в точке пересечения с этой линией оканчивается водопадом.

Зона c . Здесь $h < h_k$. Знаменатель уравнения (7.25) отрицателен. Вся дробь положительна и уклон дна i положителен, поэтому $\frac{dh}{dx} > 0$, т. е. глубина вдоль потока растет, имеет место кривая подпора (табл. 7.2). Изучим форму этой кривой.

При $h = h_{\text{к}}$ $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 0$ (т. е. знаменатель равен нулю), вся дробь равна ∞ , поэтому и $\frac{dh}{dx} = \infty$; таким образом, кривая свободной поверхности подходит под прямым углом к линии kk . При $h \rightarrow 0$ $K \rightarrow 0$. Подставляем это значение K в уравнение (7.25)

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{0 - K_0^2}{0 - jK_0^2} = i \frac{-K_0^2}{-jK_0^2} = \frac{i}{j}.$$

Нашли, что производная $\frac{dh}{dx}$ равна некоторой положительной величине. Получили вогнутую кривую подпора, изображенную на рис. 7.5 в зоне c . Эта кривая заканчивается гидравлическим прыжком (в точке пересечения с линией kk).

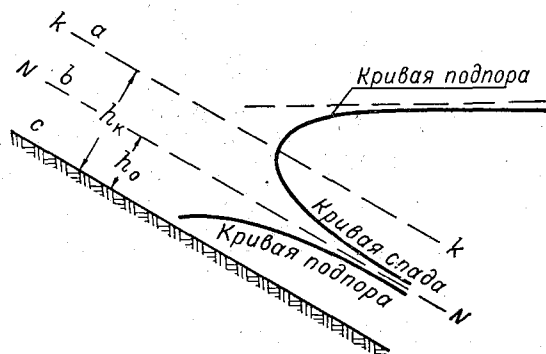


Рис. 7.6. Формы кривых свободной поверхности при прямом уклоне дна ($i > 0$) и $h_0 < h_{\text{к}}$.

Второй случай. Как и в первом случае, уклон дна i положителен, однако нормальная глубина меньше критической, т. е. $h_0 < h_{\text{к}}$ (рис. 7.6).

Зона a . В этой зоне $h > h_{\text{к}} > h_0$. Заполняем табл. 7.2: знаменатель исследуемого уравнения положителен, глубина $h > h_0$, поэтому $K > K_0$, числитель положителен; получаем положительную дробь $\frac{dh}{dx} > 0$. Глубина вдоль оси x возрастает (имеет место кривая подпора).

Изучим форму водной поверхности. При очень больших h получаем очень большие K , по сравнению с которыми K_0 оказывается очень малой величиной, поэтому дробь уравнения (7.25) стремится к единице, а $\frac{dh}{dx}$ стремится к i . Таким образом, при очень больших h кривая свободной поверхности стремится к горизонтальной прямой. При $h = h_{\text{к}}$ дробь равна ∞ , так как знаме-

натель равен 0 (табл. 7.1), а вместе с тем $\frac{dh}{dx} = \infty$. Кривая пересекает линию kk под прямым углом (рис. 7.6). Эта кривая начинается с гидравлического прыжка.

Зона b . Здесь $h_k > h > h_0$. Заполняем таблицу 7.2: знаменатель уравнения отрицателен, а числитель положителен (так как $h > h_0$ и $K > K_0$). Дробь отрицательна (имеем кривую спада).

Изучим форму водной поверхности. При $h = h_k$, $\frac{dh}{dx} = \infty$ кривая пересекает линию kk под прямым углом. При $h \rightarrow h_0$ $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$,

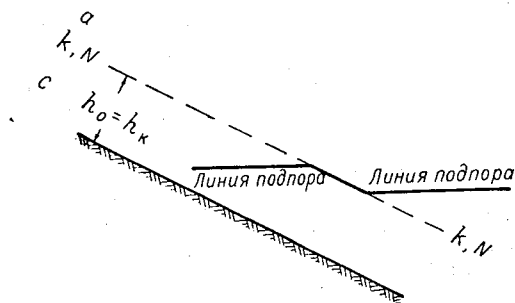


Рис. 7.7. Формы свободной поверхности при прямом уклоне дна ($i > 0$) и $h_0 = h_k$.

поэтому кривая свободной поверхности асимптотически приближается к линии NN (рис. 7.6). Началом кривой спада в зоне b является водопад.

Зона c . $h < h_0 < h_k$. Заполняем табл. 7.2: знаменатель уравнения (7.25) отрицателен. Величина $h < h_0$, $K < K_0$, поэтому и числитель отрицателен. Вся дробь получается положительной, т. е.

$\frac{dh}{dx} > 0$. Таким образом, имеем кривую подпора. Изучим форму этой кривой. При $h \rightarrow 0$ также и $K \rightarrow 0$, поэтому

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{0 - K_0^2}{0 - jK_0^2} = i \frac{-K_0^2}{-jK_0^2} = \frac{i}{j}.$$

Таким образом, $\frac{dh}{dx}$ равно положительному конечному числу $\frac{i}{j}$. Кривая подходит к линии дна под некоторым углом. При

$h \rightarrow h_0$, $K \rightarrow K_0$ и $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$, т. е. кривая асимптотически приближается к линии NN (рис. 7.6). Такая форма кривой подпора

наблюдается при истечении из-под щита в канал с уклоном больше критического.

Третий случай. Нормальная глубина равна критической, т. е. $h_0 = h_k$ (рис. 7.7). Зона *b* отсутствует. Имеем зоны *a* и *c*. Исследуем сперва зону *a*, в которой $h > h_0$, $h > h_k$; знаменатель уравнения (7.25) положителен (табл. 7.1); ввиду того что $h > h_0$, числитель положителен, значит, и вся дробь положительна, т. е. $\frac{dh}{dx} > 0$. Глубина возрастает вдоль потока т. е. имеет место кривая подпора (заполняем табл. 7.2).

Зона *c* соответствует условию $h < h_0$ и $h < h_k$. Здесь знаменатель уравнения отрицателен (табл. 7.1), числитель отрицателен, вся дробь положительна, поэтому $\frac{dh}{dx} > 0$, имеем подпор (табл. 7.2). Свободная поверхность в третьем случае как в зоне *a*, так и в зоне *c* является прямой горизонтальной линией (В. М. Маккавеев и И. М. Коновалов. Гидравлика, стр. 327).

Б. Поток с горизонтальным дном ($i=0$)

Обратимся к уравнению (7.20), которое при $i=0$ приводится к виду

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{Q^2}{K^2 \left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}\right)}. \quad (7.26)$$

Так как любому расходу Q отвечает определенное критическое состояние потока, значение Q можно выразить произведением критического модуля расхода K_k на корень квадратный из критического уклона i_k , т. е. написать

$$Q = K_k \sqrt{i_k}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (7.26), получим следующую запись уравнения неравномерного движения в призматическом русле:

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{K_k^2 i_k}{K^2 - j K_k^2}, \quad (7.27)$$

где

$$j = \frac{\alpha C^2 B i_k}{g \chi}.$$

Равномерное движение при горизонтальном дне невозможно, поэтому зона *a* отсутствует.

Рассмотрим зону *b* (рис. 7.8), в которой глубина потока превышает критическую глубину, т. е. $h > h_k$. Числитель и знамена-

тель уравнения (7.27) положительны. Дробь также положительна, но перед ней стоит знак минус. Поэтому $\frac{dh}{dx} < 0$, т. е. в зоне b имеем кривую спада. Изучим форму этой кривой. При $h=h_k$ производная $\frac{dh}{dx} = \frac{i_k}{1-j}$.

Учитывая равенство

$$i_k = \frac{g\chi_k}{\alpha C_k^2 B_k}$$

и принимая во внимание, что для потока, находящегося в критическом состоянии, все величины, содержащиеся в выражении j , будут критическими, т. е.

$$j_k = \frac{\alpha C_k^2 B_k}{g\chi_k} i_k,$$

находим $j_k=1$. При этом знаменатель уравнения (7.27) равен нулю, а его числитель положителен и не равен нулю, поэтому $\frac{dh}{dx} = -\infty$. Кривая свободной поверхности пересекает линию kk под прямым углом.

Верхнюю часть кривой получим, если примем $h \rightarrow \infty$, в связи с чем $K \rightarrow \infty$, а $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$. Таким образом, ви-

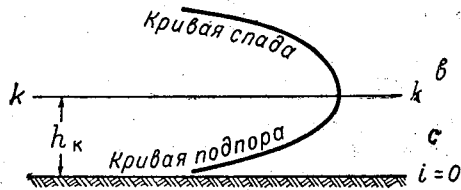


Рис. 7.8. Формы свободной поверхности потока при горизонтальном дне ($i=0$).

дим, что верхняя часть кривой асимптотически приближается к горизонтальной линии, параллельной дну. Вдоль потока, в направлении течения, глубина убывает с нарастающей интенсивностью и поток переходит в водопад (в точке, где $h=h_k$) (рис. 7.8).

Зона c . Здесь $h < h_k$, знаменатель исследуемого уравнения отрицателен; числитель, как и ранее, положителен. Так как перед дробью стоит минус, то производная $\frac{dh}{dx}$ получается положительной, т. е. имеем кривую подпора.

При $h=h_k$, $K=K_k$, $j=1$, поэтому $\frac{dh}{dx} = +\infty$. Кривая пересекает линию kk под прямым углом, что указывает на переход к гидравлическому прыжку. При $h \rightarrow 0$, $K \rightarrow 0$, $\frac{dh}{dx} \rightarrow \frac{i_k}{j}$,

т. е. вблизи дна кривая свободной поверхности образует с дном некоторый конечный угол (рис. 7.8). Такой вид кривой свободной поверхности образуется при истечении жидкости из-под щита в канал с горизонтальным дном.

В. Поток с обратным уклоном дна ($i < 0$)

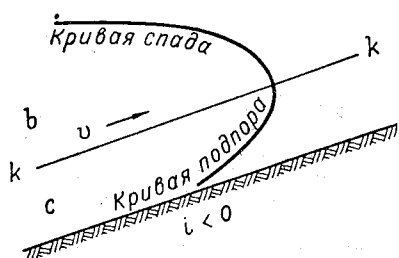
Исходным уравнением, как и выше, является уравнение (7.20). Введем модуль расхода равномерного потока, текущего в обратную сторону, т. е. в сторону уклона русла (K_1), а также абсолютную величину уклона дна (i_1). Очевидно, что $i_1 = -i$ и $Q = K_1 \sqrt{i_1}$.

Уравнение (7.20) приводится к виду

$$\frac{dh}{dx} = -i_1 \frac{K^2 + K_1^2}{K^2 - \frac{K_1^2 K^2 \alpha Bi_1}{g\omega^3}}$$

Учитывая, что $K^2 = \omega^2 C^2 R$, приходим к выражению

$$\frac{dh}{dx} = -i \frac{K^2 + K_1^2}{K^2 - jK_1^2}, \quad (7.28)$$



в котором

$$j = \frac{\alpha C^2 Bi_1}{g\chi}$$

Рис. 7.9. Формы свободной поверхности потока при обратном уклоне дна ($i < 0$).

При обратном уклоне дна равномерное движение невозможно, поэтому, как и в случае горизонтального дна, зона a отсутствует.

В зоне b глубина $h > h_k$, числитель и знаменатель уравнения (7.28) положительны. Так как перед дробью стоит знак минус, то производная $\frac{dh}{dx}$ получается отрицательной, т. е. имеем кривую спада. При $h = h_k$ кривая пересекает прямую kk под прямым углом, а при $h \rightarrow \infty$ производная $\frac{dh}{dx} \rightarrow -i$, т. е. свободная поверхность становится горизонтальной (рис. 7.9).

В зоне c глубина $h < h_k$, величина $\frac{dh}{dx}$ положительна, т. е. имеет место кривая подпора. При $h = h_k$ свободная поверхность пересекает линию kk под прямым углом. При $h \rightarrow 0$ будем иметь $\frac{dh}{dx} \rightarrow \frac{i_1}{j}$, т. е. вблизи дна кривая свободной поверхности расположена к последнему под некоторым углом (рис. 7.9).

§ 5. Гидравлический прыжок

Выше было показано, что при различных условиях в призматическом русле образуются разные формы кривых свободной поверхности потока. В каждой из рассмотренных зон (a , b и c)

имеет место особая кривая свободной поверхности. Пересечение линии критического состояния (kk) кривой спада всегда характеризуется образованием водопада (см. рис. 7.5, 7.8, 7.9). При пересечении линии kk кривой подпора, формирующейся при бурном режиме, образуется гидравлический прыжок (см. рис. 7.5, 7.6, 7.8, 7.9).

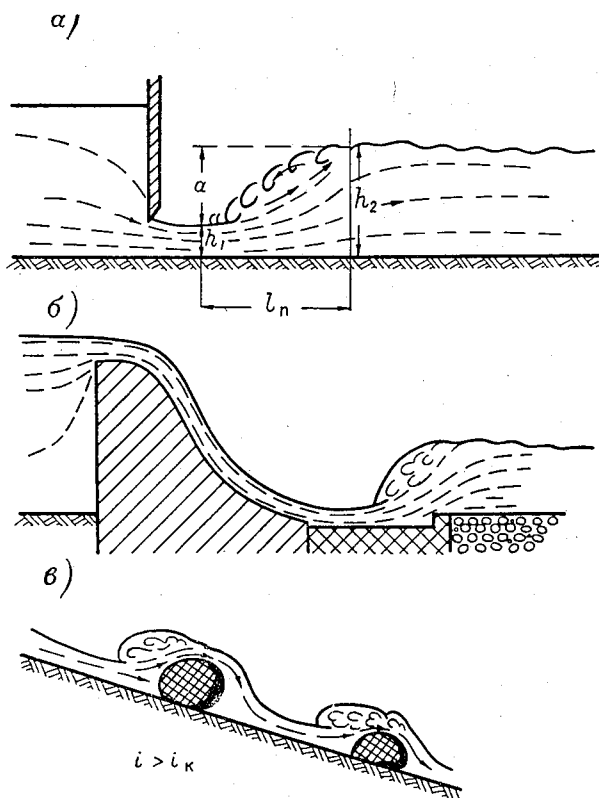


Рис. 7.10. Примеры гидравлических прыжков.

a — при истечении из-под шита, $б$ — в нижнем бьефе плотины, $в$ — на горной реке.

Прыжок формируется при истечении из-под шита в канал, продольный уклон дна которого меньше критического или если его дно является горизонтальным. Прыжок наблюдается в нижних бьефах плотин. Гидравлические прыжки являются характерной особенностью рек и ручьев, продольный уклон русла которых превышает критическое значение. В этом случае прыжки образуются перед препятствиями и в местах резкого уменьшения уклона. Такой тип потоков характерен для горных условий. Примеры гидравлических прыжков приведены на рис. 7.10.

На схемах гидравлических прыжков, показанных на упомянутом рисунке, можно видеть транзитную часть потока, претерпевающую резкое изменение площади сечения и глубины, и находящийся над ним водяной валец, характеризующийся вращательным движением в вертикальной плоскости. В нижней части вальца течение совпадает по направлению с транзитным потоком, а в верхней имеет противоположное направление. Между вальцом и транзитным потоком происходит обмен массами и количеством движения. Валец гидравлического прыжка часто теряет свою сплошность, насыщаясь пузырьками воздуха. Фронтальная часть прыжка почти всегда представляет собой пенистый гребень.

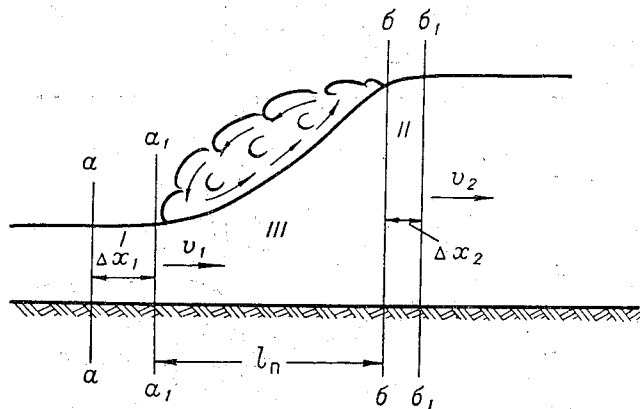


Рис. 7.11. Схема к выводу уравнения прыжковой функции.

При переходе через гидравлический прыжок в потоке изменяется соотношение между кинетической энергией и потенциальной энергией сечения и происходит потеря энергии. Эту потерю будем обозначать через $\Delta \mathcal{E}_п$.

Значения глубины потока перед прыжком и сразу после прыжка обозначим соответственно через h_1 и h_2 , эти глубины называются сопряженными (или взаимными). Длину прыжка обозначим $l_п$, а высоту $a_п$, причем $a_п = h_2 - h_1$. Особенность сопряженных глубин выражается следующими неравенствами: $h_1 < h_к$, $h_2 > h_к$. Именно это и указывает на то, что переход через критическое состояние потока осуществляется в виде гидравлического прыжка.

Составим уравнение изменения количества движения для гидравлического прыжка в призматическом русле с горизонтальным дном ($i=0$). Рассмотрим рис. 7.11, на котором показан выделенный в потоке контрольный объем $аабб$, включающий прыжок. Через интервал времени Δt контрольный объем сместится и займет положение $а₁а₁б₁б₁$. Весь объем жидкости, заключенный между

сечениями aa и b_1b_1 , разделим на три части и обозначим их римскими цифрами I , II и III .

Уравнение изменения количества движения (К. Д.) за время Δt для контрольного объема в проекции на ось x запишем следующим образом:

$$(К. Д. III + К. Д. II) - (К. Д. III + К. Д. I) = F_x \Delta t, \quad (7.29)$$

где $F_x \Delta t$ — проекция на ось x импульса сил, действующих на выделенный объем. В левой части уравнения символически показаны значения количества движения (К. Д.) частных объемов I , II и III . Объемы I и II выразятся соответственно произведениями $\omega_1 \Delta x_1$ и $\omega_2 \Delta x_2$, где ω_1 и ω_2 — площади поперечных сечений потока.

Перемещения Δx_1 и Δx_2 можно определить через произведения скорости на время Δt , т. е. принять:

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta x_2 = v_2 \Delta t.$$

Очевидно, что теперь можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \text{К. Д. } I &= \frac{\gamma}{g} \omega_1 \alpha v_1^2 \Delta t; \\ \text{К. Д. } II &= \frac{\gamma}{g} \omega_2 \alpha v_2^2 \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Здесь в выражении квадрата скорости учтен корректирующий множитель α . Заметим, что эту величину α надо отличать от корректива распределения скоростей в уравнении живых сил, хотя там этот корректив также обозначен через α . Вообще говоря, численно эти две величины близки друг другу.

Рассмотрим силы, действующие на выделенный объем жидкости. Ввиду принятого предположения о горизонтальности дна потока в месте образования прыжка продольную составляющую силы тяжести принимаем равной нулю. Силой трения на пути l_n будем пренебрегать из-за ее малости. Остаются силы гидродинамического давления. Равнодействующая сил гидродинамического давления, приложенных к выделенному объему, будет определяться следующей разностью:

$$P_1 - P_2 = \gamma (\omega_1 y_{01} - \omega_2 y_{02}), \quad (7.31)$$

где P_1 и P_2 — силы давления, действующие соответственно на грани 1 и 2 ; y_{01} и y_{02} — глубины погружения (расстояния от свободной поверхности) центров тяжести площадей ω_1 и ω_2 .

Учитывая, что $F_x \Delta t = (P_1 - P_2) \Delta t$, заменяя v^2 квадратом расхода Q , деленного на квадрат площади сечения потока, подставляя в уравнение (7.29) значения входящих в него величин, находим

$$\frac{\alpha Q^2}{g \omega_1} + \omega_1 y_{01} = \frac{\alpha Q^2}{g \omega_2} + \omega_2 y_{02}. \quad (7.32)$$

Расход Q является постоянным. Величины ω и y_0 представляют собой функции глубины h , поэтому уравнение (7.32) можно представить в виде

$$\Theta(h_1) = \Theta(h_2), \quad (7.33)$$

где

$$\Theta(h) = \frac{\alpha Q^2}{g\omega} + \omega y_0. \quad (7.34)$$

Величина $\Theta(h)$ называется прыжковой функцией. Уравнение (7.32) или в другом виде (7.33) называется уравнением сопряженных (или взаимных) глубин. Оно позволяет при заданном расходе Q , заданной форме русла (которое должно быть призматическим) определять по одной (заданной) сопряженной глу-

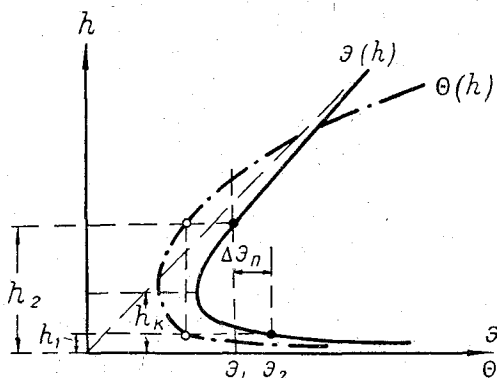


Рис. 7.12. Графики прыжковой функции $\Theta(h)$ и удельной энергии сечения потока $\mathcal{E}(h)$.

бине (например, перед прыжком) другую сопряженную глубину (например, после прыжка).

Прыжковая функция $\Theta(h)$ изображена на рис. 7.12, где одновременно представлен и график удельной энергии сечения $\mathcal{E}(h)$. На рисунке показано, как графически отыскивается сопряженная глубина и определяется потеря энергии в гидравлическом прыжке. Если, например, задана глубина перед прыжком h_1 , то по этой глубине находим прыжковую функцию $\Theta(h)$. Восстанавливая перпендикуляр из точки пересечения $\Theta(h)$ с горизонтальной линией $h_1 = \text{const}$ (эта точка помечена на чертеже кружком), находим сопряженную глубину h_2 в точке пересечения перпендикуляра с графиком $\Theta(h)$ (это пересечение также помечено кружком). Взаимным глубинам h_1 и h_2 отвечают значения энергии \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Разность этих величин определяет потерю энергии $\Delta \mathcal{E}_n$ в прыжке, т. е.

$$\Delta \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (7.35)$$

Потери напора в гидравлическом прыжке связаны с имеющим здесь место внезапным расширением потока (об этих потерях речь будет идти в следующем параграфе) и обусловлены в основном вихревыми течениями в вальце.

Теоретическим путем можно вывести следующую формулу потери энергии в гидравлическом прыжке (см. в книге В. М. Макавеева и И. М. Коновалова «Гидравлика»):

$$\Delta \mathcal{E}_n = \frac{a^3}{4h_1 h_2}, \quad (7.36)$$

где $a = h_2 - h_1$ — высота прыжка.

Задача о сопряженных глубинах гидравлического прыжка может быть решена и без прыжковой функции. Для этой цели может быть использован график $\mathcal{E}(h)$ и формула (7.36). Последняя содержит искомую величину (h_2 или h_1), поэтому определение сопряженных глубин выполняется методом подбора. Заметим, что сходимость при этом достигается весьма быстро.

Для нахождения длины гидравлического прыжка можно пользоваться следующей приближенной формулой Н. Н. Павловского:

$$l_n = \frac{1}{2} (4,5h_2 + 5a). \quad (7.37)$$

§ 6. Потери напора при внезапном расширении потока

Потери напора в потоках делятся на два вида: 1) линейные потери напора, 2) местные потери напора, это главным образом потери при резком расширении потока. Линейные потери определяются сопротивлением русла по пути движения потока. Эти потери уже детально рассматривались выше. В уравнениях равномерного и неравномерного движения линейные потери напора выражаются формулой

$$\Delta h_w = \frac{v_{cp}^2}{C^2 R} \Delta x.$$

Местные потери напора связаны обычно с резким или, как говорят, внезапным расширением потока. К главным случаям такого рода относятся следующие: 1) внезапное расширение потока в трубе (рис. 7.13), 2) гидравлический прыжок, 3) резкое увеличение площади поперечного сечения открытого потока, 4) повороты русла. Во всех этих случаях расширяющемуся транзитному потоку сопутствуют водоворотные течения в виде вальцов (в верхней части гидравлического прыжка), водоворотов с вертикальной осью (в местах резкого расширения речных потоков), в виде циркуляционных течений в расширяющейся части трубы, окружающих транзитную струю подобно кольцу (рис. 7.13). Основные потери напора при внезапном расширении потока обусло-

влены именно этими водоворотными течениями, получающими энергию от транзитного потока.

Поток, выходя в расширенную часть русла (или трубы), испытывает влияние водоворотных течений, действующих на него с одной или с нескольких сторон, и на некотором расстоянии от начала расширения транзитный поток претерпевает сжатие, достигает наименьшего сечения при наибольшей средней скорости, а затем начинает расширяться. Наименьшее сечение потока носит название сжатого сечения ($\omega_{сж}$) (см. рис. 7.13). Сжатие потока обычно невелико и при решении ряда практических задач им пренебрегают, вводя в расчет только первоначальное сечение ω_1 .

Местные потери напора происходят не только на участках расширения, но и на участках сжатия потока. Непосредственной

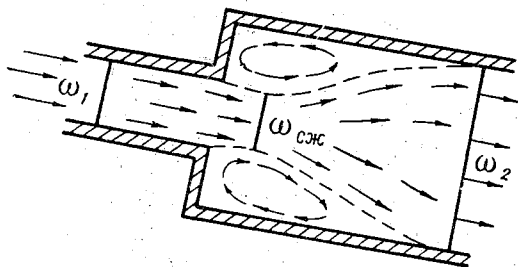


Рис. 7.13. Внезапное расширение потока в трубе.

причиной такого рода потерь является образование вблизи от начала участка сжатия трубы или русла сжатого сечения потока с последующим его расширением. Отжим струй при таком сжатии может быть неполным и циркуляционные течения могут не образовываться. Потери напора в этом случае обусловлены перераспределением скоростей в поперечном профиле потока перед сжатым сечением и после него.

При резких поворотах и даже при относительно плавных закруглениях русловых и напорных потоков имеют место местные потери напора, тем более значительные, чем круче поворот. Особенно они велики в тех случаях, когда за поворотом образуется зона отжима струй с прилегающей к ней водоворотной областью.

Рассмотрим местные потери на примере внезапного расширения напорного потока (рис. 7.13). Применяя уравнение изменения количеств движения к контрольному объему потока, заключенному между сечениями ω_1 и ω_2 , и используя для указанных сечений уравнение Бернулли, учитывающее потери напора Δh_w , получаем следующую формулу:

$$\Delta h_{м.п} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (7.38)$$

где через $\Delta h_{м.п}$ обозначены местные потери напора, обусловленные внезапным расширением. Заметим, что при выводе этой формулы, носящей наименование формулы Борда, потери на трение по длине рассматриваемого участка потока не учитывались и распределение давления принималось по гидростатическому закону.

Местные потери напора при расширении могут быть выражены через скорость в расширенном сечении v_2 , тогда формула (7.38) записывается в виде

$$\Delta h_{м.п} = \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad (7.39)$$

где ζ — коэффициент местного сопротивления, определяемый из соотношения

$$\zeta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2. \quad (7.40)$$

При использовании этой формулы следует учитывать возможность некоторой неточности, обусловленной тем, что в ней содержится величина ω_1 , тогда как казалось бы более правильным включение в нее площади сжатого сечения $\omega_{сж}$. Практически, однако, это затруднительно ввиду того, что учет условий сжатия требует специального рассмотрения задачи с использованием данных о конкретных формах трубопровода или русла.

При гидравлических расчетах все местные потери напора на рассматриваемом участке потока и линейные потери суммируются.

При расчетах естественных водных потоков местные потери учитываются одновременно с линейными потерями путем подбора соответствующих значений коэффициентов шероховатости n в формуле коэффициента Шези C

$$C = \frac{1}{n} H^{1/6}.$$

Именно значения n , содержащиеся в таблице этих величин, подобраны таким образом, что местные сопротивления, связанные с местными расширениями русла (за побочными, за грядами и т. д.), чередованием расширенных и суженных участков, оказываются учтенными наряду с линейными потерями напора. Суммарный эффект местных и линейных потерь оказывается учтенным также при вычислении C по формуле Шези при использовании данных фактических измерений расхода, площади сечения потока и уклона.

§ 7. Интегрирование уравнения неравномерного движения потока в открытом русле

В настоящем параграфе будет рассмотрен предложенный Б. А. Бахметевым метод интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения потока в открытом русле

с прямым уклоном дна ($i > 0$). Предположение о неизменности формы русла по длине потока остается в силе, в связи с чем в качестве исходного уравнения используется уравнение неравномерного движения потока в призматическом русле.

Б. А. Бахметев считает, что для указанных условий допустимо принять модуль расхода K зависящим только от глубины потока h . Такое приближенное предположение позволяет ему записать

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0}\right)^b, \quad (7.41)$$

где индексом «0», как и ранее, обозначены величины, характеризующие равномерное движение при заданных значениях расхода Q , уклона дна i , размера и формы русла; иначе говоря, это нормальный модуль расхода и нормальная глубина. Показатель степени b , называемый обычно гидравлическим показателем русла, изменяется для русел разной формы от 2,8 до 4,0 и в более редких случаях до 5.

В курсах гидравлики часто приводятся аналитические выражения показателя b , однако эти формулы применимы только для отдельных видов поперечного профиля русла. Универсальной формулы не существует, поэтому показатель b следует определять по графику $K(h)$, построенному для рассматриваемой формы русла.

Обратимся к уравнению неравномерного движения, приведенному к виду

$$i dx = \frac{1 - j \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2} dh. \quad (7.42)$$

Введем относительную глубину потока η , принимая

$$\frac{h}{h_0} = \eta, \quad (7.43)$$

откуда

$$dh = h_0 d\eta.$$

Подставляя в уравнение (7.42) выражение (7.41), вводя относительную глубину η и заменяя далее дифференциал глубины произведением $h_0 d\eta$, после простых преобразований получаем следующее равенство:

$$dx = \frac{h_0 (\eta^b - j)}{i (\eta^b - 1)} d\eta. \quad (7.44)$$

Прибавляя и отнимая единицу, записываем

$$dx = \frac{h_0}{i} \left(1 - 1 + \frac{\eta^b - j}{\eta^b - 1} \right) d\eta,$$

а затем находим

$$dx = \frac{h_0}{i} \left[d\eta - (1-j) \frac{d\eta}{1-\eta^b} \right]. \quad (7.45)$$

Если проинтегрируем это уравнение, то получим длину участка как функцию глубины h (или относительной глубины). Если расчет вести по интервалам относительной глубины $\Delta\eta$, то для параболического русла можно заранее вычислить среднее для интервала значение j и, учитывая, что по указанию Бахметева величина j изменяется мало, отнести это значение ко всему интервалу. Рассматриваемая величина вычисляется по формуле

$$j = \frac{\alpha i C^2 B}{g \chi}.$$

Принимая, что указанный выше интервал отвечает пределам интегрирования от η_1 до η_2 , записываем

$$(1-j) \cong (1-j_{cp})$$

и производим интегрирование

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{h_0}{i} \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta - (1-j_{cp}) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^b} \right]. \quad (7.46)$$

Длина участка, в пределах которого аргумент η изменяется от η_1 до η_2 , будет

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Теперь напомним

$$\Delta x = \frac{h_0}{i} \left[\eta_2 - \eta_1 - (1-j_{cp}) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^b} \right]. \quad (7.47)$$

Очевидно, что входящую в правую часть уравнения квадратуру можно представить в виде разности следующим образом:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^b} = \int_0^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^b} - \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{1-\eta^b}.$$

Введем обозначение

$$\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{1-\eta^b} = B(\eta) \quad (7.48)$$

($B(\eta)$ называется функцией Бахметева, или функцией неравномерного движения).

Теперь уравнение (7.47) может быть записано в виде

$$\Delta x = \frac{h_0}{i} \{ \eta_2 - \eta_1 - (1 - j_{cp}) [B(\eta_2) - B(\eta_1)] \}. \quad (7.49)$$

Б. А. Бахметев и Н. Н. Павловский произвели вычисления интегралов (7.48) при значениях b от 2,8 до 5,4 для большого диапазона величин η . На основании вычислений составлены таблицы, которые приводятся в сокращенном виде (табл. 7.3 и 7.4).

Построение кривой свободной поверхности неравномерного потока, протекающего в призматическом русле, производится по формуле (7.49) при использовании табл. 7.3 и 7.4. Расчет ведется по интервалам величины η , являющейся относительным значе-

Таблица 7.3

Значения функции Бахметева $B(\eta)$ при $\eta > 1$

η	b							
	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2
1,01	1,57	1,42	1,29	1,18	1,09	1,01	0,94	0,87
1,02	1,33	1,19	1,08	0,98	0,90	0,83	0,77	0,71
1,05	1,01	0,90	0,80	0,72	0,66	0,60	0,55	0,50
1,10	0,78	0,68	0,60	0,54	0,48	0,43	0,39	0,36
1,15	0,65	0,56	0,49	0,43	0,38	0,34	0,31	0,28
1,20	0,56	0,48	0,42	0,36	0,32	0,28	0,25	0,23
1,30	0,44	0,37	0,32	0,27	0,24	0,21	0,18	0,16
1,40	0,36	0,30	0,26	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12
1,50	0,31	0,26	0,21	0,18	0,15	0,13	0,11	0,09
1,75	0,21	0,18	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05
2,00	0,17	0,13	0,10	0,08	0,07	0,05	0,04	0,04
2,5	0,11	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
3,0	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
4,0	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00
5,0	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	

Таблица 7.4

Значения функции Бахметева $B(\eta)$ при $\eta < 1$

η	b							
	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2
0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
0,40	0,41	0,41	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
0,50	0,52	0,52	0,51	0,51	0,51	0,51	0,51	0,50
0,60	0,64	0,64	0,63	0,63	0,62	0,62	0,62	0,61
0,70	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74	0,74	0,74
0,80	0,97	0,95	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88
0,90	1,25	1,22	1,19	1,16	1,14	1,12	1,10	1,09
0,99	2,11	2,02	1,94	1,87	1,81	1,76	1,71	1,67

нием ординаты кривой свободной поверхности, и позволяет получить соответствующие этим интервалам значения Δx (т. е. длины участков) и по ним найти абсциссы x кривой свободной поверхности. Зная величину h_0 для рассматриваемого потока, находим абсолютные значения глубин $h = h_0 \eta$ и, используя полученные значения x_1, x_2, x_3 и т. д., строим кривую свободной поверхности неравномерного потока в призматическом русле.

Глава VIII

ГИДРАВЛИКА ВОДОСЛИВНЫХ И ВОДОМЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

§ 1. Истечение жидкости через отверстия и насадки

Истечение жидкости через отверстия и насадки может происходить при постоянном и переменном напоре. Жидкость может

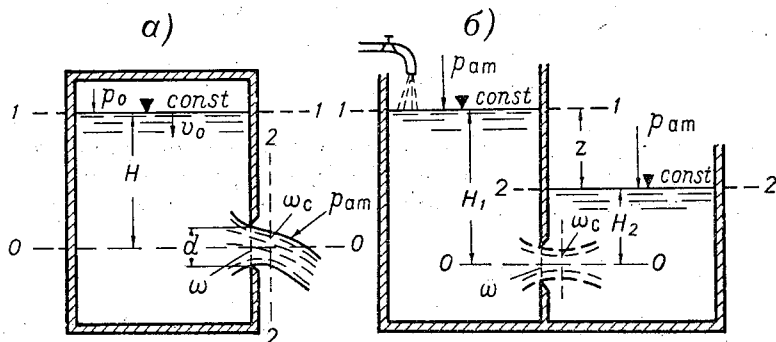


Рис. 8.1. Истечение жидкости в атмосферу (а) и в воду (б).

вытекать либо непосредственно в атмосферу, через так называемое незатопленное отверстие (рис. 8.1 а), либо под уровень жидкости, находящейся в нижнем бьефе (или соответственно в сосуде), т. е. через затопленное отверстие (рис. 8.1 б).

В гидравлике различают истечение из малых и больших отверстий. Малыми отверстиями называют такие, вертикальный размер которых настолько мал по сравнению с напором, что напор в любой точке отверстия можно принимать равным напору в центре тяжести сечения отверстия.

Рассмотрим истечение жидкости при постоянном напоре через малое незатопленное отверстие в тонкой стенке (рис. 8.1 а). Постоянство напора в изображенном на рисунке сосуде поддерживается за счет поступления жидкости в сосуд на некотором расстоянии от плоскости, представленной на чертеже. Поня-

тие «тонкой стенки» в задачах об истечении из отверстий отвечает случаю, когда края отверстия имеют острую кромку и толщина стенки не влияет на форму струи. Используем следующие обозначения: ω — площадь отверстия, d — диаметр отверстия, ω_c — площадь сжатого сечения струи, p_0 — давление на поверхности жидкости в сосуде (в сечении 1—1); в общем случае оно может быть не равно атмосферному давлению $p_{ат}$, p_c — давление в сжатом сечении струи 2—2, равное атмосферному ($p_c = p_{ат}$), так как струя по всему периметру окружена атмосферой, H — глубина погружения центров тяжести площади отверстия ω и сжатого сечения ω_c (падением жидкости на расстоянии от стенки до сечения 2—2 пренебрегаем), v_0 — скорость жидкости в сечении 1—1, v_c — скорость истечения жидкости в сжатом сечении 2—2.

Для того чтобы определить скорость v_c и расход Q жидкости, вытекающей из отверстия, применим уравнение Бернулли, записав его для сечения 1—1, расположенного на поверхности жидкости, и для пересекающего струю сжатого сечения 2—2. Уравнение запишем относительно плоскости 0—0, проходящей через центр тяжести отверстия

$$H + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_w. \quad (8.1)$$

Поскольку при истечении из отверстий рассматривается движение жидкости на очень коротком участке, можно считать, что потеря напора происходит лишь за счет местных сопротивлений

$$h_w = h_{вх} = \zeta_{вх} \frac{v_c^2}{2g}, \quad (8.2)$$

где $\zeta_{вх}$ — коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора на участке от сечения 1—1 до сечения 2—2. Приняв во внимание, что $p_c = p_{ат}$ и пренебрегая неравномерностью распределения скоростей на свободной поверхности и в сжатом сечении ($\alpha_0 = \alpha_c = 1$), а также учтя равенство (8.2), можем записать уравнение (8.1) в следующем виде:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_{ат}}{\gamma} + \frac{v_c^2}{2g} + \zeta_{вх} \frac{v_c^2}{2g}. \quad (8.3)$$

Введя обозначение

$$H + \left(\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_{ат}}{\gamma} \right) + \frac{v_0^2}{2g} = H_0, \quad (8.4)$$

где H_0 — полный напор, получим следующее выражение для скорости жидкости в сжатом сечении:

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{вх}}} \sqrt{2gH_0}, \quad (8.5)$$

или

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH_0}, \quad (8.6)$$

где

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{вх}}}$$

— коэффициент скорости.

Для случая когда $p_0 = p_{ат}$ (что часто имеет место в гидротехнической практике), а величина $\frac{v_0^2}{2g}$ пренебрежимо мала по сравнению с H полный напор равен глубине погружения центра тяжести отверстия $H_0 = H$ и формула скорости (8.6) принимает вид

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (8.7)$$

Величина расхода Q будет равна

$$Q = \omega_c v_c, \quad (8.8)$$

или

$$Q = \epsilon \omega \varphi \sqrt{2gH_0}; \quad (8.9)$$

здесь $\epsilon = \frac{\omega_c}{\omega}$ — коэффициент сжатия струи.

Обозначая произведение $\epsilon\varphi$ через μ , получим окончательный вид формулы для расхода через малое незатопленное отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}, \quad (8.10)$$

где μ — коэффициент расхода, учитывающий и потерю напора h_w , и степень сжатия струи, выходящей из отверстия.

При $p_0 = p_{ат}$ и малой скорости подхода, т. е. при $v_0 \cong 0$, формула (8.10) примет вид

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}. \quad (8.11)$$

Значения коэффициентов сжатия ϵ , сопротивления $\zeta_{вх}$, скорости φ и расхода μ установлены опытным путем. При так называемом совершенном (или наибольшем) сжатии, которое имеет место при достаточном удалении отверстия от свободной поверхности жидкости, от противоположной стенки и дна сосуда (не менее трехкратного размера отверстия) коэффициент сжатия $\epsilon = 0,64 \div 0,60$. Для этого случая коэффициент скорости при истечении из малого отверстия в тонкой стенке $\varphi = 0,97$, коэффициент сопротивления $\zeta_{вх} = 0,06$, а коэффициент расхода $\mu = 0,62 \div 0,60$.

Выведем формулы для определения скорости и расхода жидкости при истечении через затопленное отверстие, приняв

давление на поверхности жидкости в обоих сосудах равным атмосферному (рис. 8.1 б). Напишем уравнение Бернулли относительно плоскости 0—0, проходящей через центр тяжести отверстия для двух горизонтальных сечений 1—1 и 2—2, совпадающих со свободной поверхностью жидкости в сосудах

$$\frac{v_1^2}{2g} + H_1 = \frac{v_2^2}{2g} + H_2 + h_w. \quad (8.12)$$

Учитывая, что скорости течения на свободной поверхности весьма малы по сравнению со скоростью истечения, можно принять $v_1 \cong v_2 \cong 0$; тогда для разности уровней z получим следующее равенство:

$$z = H_1 - H_2 = h_w. \quad (8.13)$$

Местные потери напора h_w от сечения 1—1 до сечения 2—2 складываются из потери при входе в отверстие ($h_1 = \zeta_{\text{вх}} \frac{v_c^2}{2g}$) и потери на выходе при внезапном расширении струи на участке от сжатого сечения до сечения 2—2 ($h_2 = \zeta_{\text{вых}} \frac{v_c^2}{2g}$). Подставляя значения потерь в равенство (8.13), получим

$$z = \frac{v_c^2}{2g} (\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вых}}), \quad (8.14)$$

откуда

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вых}}} \sqrt{2gz}}. \quad (8.15)$$

Обозначив $\sqrt{\frac{1}{\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вых}}}}$ по-прежнему через коэффициент скорости φ , будем иметь

$$v_c = \varphi \sqrt{2gz}. \quad (8.16)$$

Если учитывать скорость подхода, то разность уровней z следует увеличить на значение скоростного напора $\frac{v_0^2}{2g}$.

Тогда формула (8.16) примет вид

$$v_c = \varphi \sqrt{2gz_0}, \quad (8.17)$$

где

$$z_0 = z + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Расход жидкости через затопленное отверстие определяется аналогично расходу через незатопленное отверстие: с учетом скорости подхода

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz_0}, \quad (8.18)$$

без учета скорости подхода

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz}. \quad (8.19)$$

Значения коэффициентов скорости φ и расхода $\mu = \varepsilon\varphi$ принимают для затопленных отверстий такими же, как и для незатопленных отверстий ($\varphi \approx 0,97$ и $\mu \approx 0,62$). Следовательно, формулы

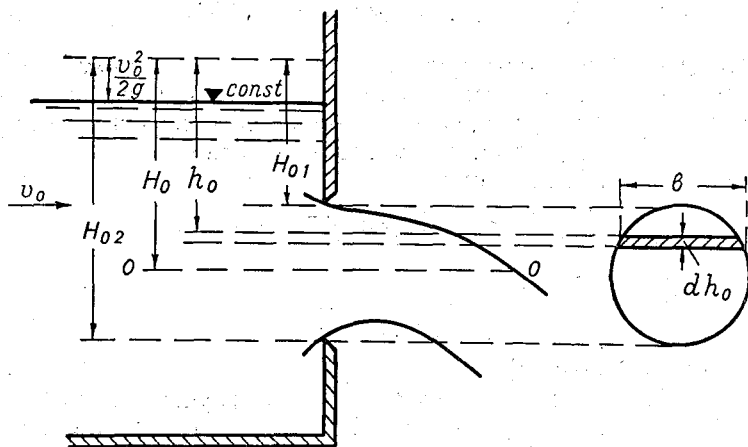


Рис. 8.2. Истечение из большого отверстия.

скорости и расхода для затопленного отверстия отличаются от аналогичных формул для незатопленного отверстия только тем, что в них вместо напора (H или H_0) входит разность уровней (z или z_0).

При определении расходов через большие отверстия, вертикальные размеры которых соизмеримы с величиной напора H над центром отверстия, необходимо учитывать изменение напора в струе от верхней кромки отверстия до нижней и обусловленное этим неравномерное распределение скорости по сечению струи. С этой целью все сечение отверстия ω разбивают на бесконечно малые горизонтальные полоски и определяют расход через каждую полоску, имеющую площадь $d\omega = b dh_0$ (рис. 8.2), по формуле для малых отверстий

$$dQ = \mu b dh_0 \sqrt{2gh_0}, \quad (8.20)$$

где $h_0 = h + \frac{v_0^2}{2g}$ — полный напор над центром тяжести элементарной площадки $d\omega$.

Полный расход через большое отверстие определится интегралом выражения (8.20) в пределах от H_{01} до H_{02}

$$Q = \int_{H_{01}}^{H_{02}} \mu b \sqrt{2gh_0} dh_0. \quad (8.21)$$

Для прямоугольного отверстия $b = \text{const}$ интегрирование уравнения (8.21) дает

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} b (H_{02}^{3/2} - H_{01}^{3/2}). \quad (8.22)$$

Вследствие сложности получаемых расчетных формул (их вид зависит от формы отверстия) в практической гидравлике используют для расчета расходов через большие отверстия формулы такой же структуры, что и для малых отверстий: для незатопленных отверстий

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0},$$

для затопленных отверстий

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz_0}$$

(обозначения прежние).

В этих формулах коэффициент расхода μ учитывает неравномерность распределения скоростей в сечении отверстия и имеет иные значения, чем при истечении из малых отверстий. Величины μ для разных видов отверстий определяются опытным путем; для грубо ориентировочных расчетов коэффициент расхода μ для больших отверстий принимают равным 0,7.

Перейдем к рассмотрению вопроса об истечении жидкости из насадков. Насадком называется короткая трубка, присоединенная к отверстию в стенке сосуда. Типы насадков показаны на рис. 8.3. Структура расчетных формул для определения расхода воды из насадков такая же, как и формул для истечения из отверстий в тонкой стенке.

Для незатопленных насадков применяется зависимость

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0},$$

для затопленных —

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz_0}.$$

Значения коэффициентов расхода μ зависят от формы насадка. Насадки изменяют условия протекания струи и тем самым

вливают на величины сжатия, сопротивления, скорости и расхода вытекающей струи. Так, например, при входе в насадок Вентури струя сначала сжимается, достигая наименьшей площади на некотором удалении от входа, а затем, при достаточной длине насадка ($l = (3,5 \div 4)d$) расширяется и выходит из насадка полным сечением ($\varepsilon = 1$). Коэффициенты скорости φ и расхода $\mu = \varepsilon\varphi$ для струи, вытекающей из внешнего цилиндрического насадка, оказываются одинаковыми, поэтому коэффициент расхода через насадок $\mu_{\text{нас}} = \varphi_{\text{нас}}$ всегда больше коэффициента расхода для отверстия в тонкой стенке $\mu_{\text{отв}} = \varepsilon_{\text{отв}}\varphi_{\text{отв}}$, где $\varepsilon_{\text{отв}} < 1$.

Сравнение величин расхода и скорости струй, вытекающих из насадка Вентури и из отверстия при одном и том же напоре и площади отверстия, обнаруживает существенный эффект насадков, а именно: $Q_{\text{нас}} \cong 1,34Q_{\text{отв}}$; $v_{\text{нас}} \cong 0,85v_{\text{отв}}$.

Таким образом, насадок Вентури увеличивает расход на 34% и снижает скорость на 15%. Это объясняется тем, что насадок снижает до минимума степень сжатия струи. В гидравлике бытует объяснение увеличения расходов в насадках образованием зоны пониженного давления, дающей как бы дополнительный напор при истечении. Такое объяснение является неточным, так как не учитывает, что на создание зоны пониженного давления расходуется часть кинетической энергии самого потока.

Насадки широко используются в технике. Они применяются в плотинах для водоспусков, обеспечивая высокую эффективность последних ($\mu = 0,82$); они используются в соплах турбин, гидромониторах, брандспойтах, где применяются конические сходящиеся насадки, значительно увеличивающие скорость вытекающей струи ($\varphi = 0,97$) и расход ($\mu = 0,95$). В тех случаях, когда необходимо уменьшить скорость струи и ее кинетическую энергию, например, в трубах-водовыпусках при орошении, в отводящих трубах от турбин гидроэлектростанций и др., применяются диффузорные насадки ($\varphi = \mu = 0,45$). Коноидальные насадки, обладающие высокими значениями коэффициентов скорости и расхода ($\varphi = \mu = 0,97$), используются для входных отверстий в гидротехнические сооружения.

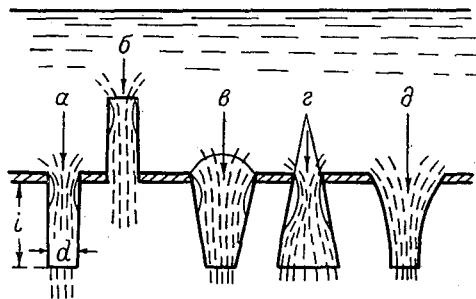


Рис 8.3. Типы насадков.

a, б — цилиндрические насадки (внешний — насадок Вентури и внутренний — насадок Борда); *в, г* — конические насадки, сходящиеся (конфузоры) и расходящиеся (диффузоры); *д* — коноидальный насадок, имеющий форму вытекающей струи.

§ 2. Истечение жидкости при переменном напоре

Рассмотрим особенности истечения жидкости из отверстий и насадков при переменном напоре, т. е. при изменении уровня в резервуаре, из которого или в который происходит истечение жидкости. В этом случае имеет место неустановившийся режим движения жидкости, и потому уравнение Бернулли непосредственно применять нельзя. Тем не менее во многих случаях, допускающих пренебрежение величиной $\frac{\partial v}{\partial t}$, задачу об истечении при переменном напоре можно свести к решению, отвечающему установившемуся движению.

Рассмотрим конкретный случай перелива воды из одного резервуара в другой (рис. 8.4). Полное время истечения разделим

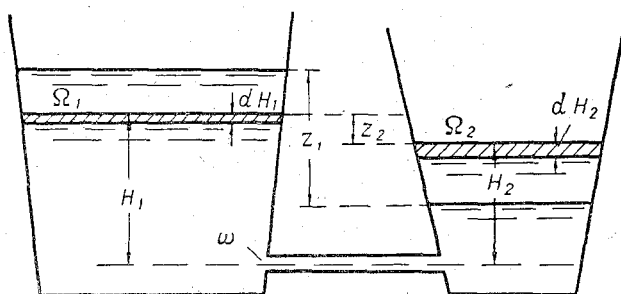


Рис. 8.4. Истечение при переменном напоре под переменный уровень.

на бесконечно малые интервалы dt , в течение которых напор будем считать неизменным, а движение установившимся. Это даст возможность использовать для каждого интервала dt формулу установившегося движения. Определим время, необходимое для выравнивания уровней жидкостей в резервуарах. Эта задача является весьма общей, так как в этом случае истечение происходит при одновременном изменении уровней в обоих сосудах. Резервуары соединены короткой трубой с площадью сечения ω . Площадь зеркала воды в первом резервуаре равна Ω_1 , а во втором Ω_2 . В первоначальный момент времени разность уровней равнялась z_1 , в некоторый момент времени t она стала равной z_2 (при напоре в первом резервуаре, равном H_1 , и во втором H_2).

За промежуток времени dt из первого резервуара во второй вытекает через патрубок объем жидкости $\omega \sqrt{2gz} dt$, при этом уровень в первом резервуаре изменится на величину $-dH_1$, а во втором — на величину $+dH_2$. Очевидно, что объемы жидкости, вытекшей из первого резервуара ($\Omega_1 dH_1$) и поступившей во вто-

рой резервуар ($\Omega_2 dH_2$), равны между собой; следовательно, можно написать

$$-\Omega_1 dH_1 = \Omega_2 dH_2 = \mu\omega \sqrt{2gz} dt. \quad (8.23)$$

Равенство $z = H_1 - H_2$ приводит к следующему соотношению между дифференциалами:

$$dz = dH_1 - dH_2.$$

Левые равенства формулы (8.23) позволяют написать

$$dH_1 = -\frac{\Omega_2}{\Omega_1} dH_2.$$

Отсюда находим

$$dz = -\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} + 1\right) dH_2$$

и

$$dH_2 = -\frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2} dz.$$

Подставляя значение dH_2 в формулу (8.23), получаем

$$-\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dz = \mu\omega \sqrt{2gz} dt.$$

Разделяя переменные, приходим к следующему виду дифференциального уравнения:

$$dt = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu\omega \sqrt{2gz}} dz. \quad (8.24)$$

Интегрируя уравнение в пределах от 0 до t и от z_1 до z_2 при $\mu = \text{const}$, получаем

$$t = -\frac{1}{\mu\omega \sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}. \quad (8.25)$$

Эта формула позволяет вычислить время, необходимое для изменения разности отметок в двух резервуарах при переливе воды из одного в другой. Если резервуары цилиндрические, то Ω_1 и Ω_2 являются постоянными и уравнение (8.25) принимает вид

$$t = \frac{2\Omega_1 \Omega_2 (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu\omega \sqrt{2g}}. \quad (8.26)$$

В этом случае время полного выравнивания уровней ($z=0$) определится формулой

$$T = \frac{2\Omega_1 \Omega_2 \sqrt{z_1}}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu\omega \sqrt{2g}}. \quad (8.27)$$

§ 3. Истечение жидкости через водосливы

Водосливом называется перегораживающая поток часть сооружения, через которую происходит перелив жидкости с одного уровня на другой. Они имеют широкое применение в гидротехнике, а также в гидрометрии, где используются для измерения расходов воды. Теория водослива лежит в основе гидравлического расчета плотин и многих видов водоспусков.

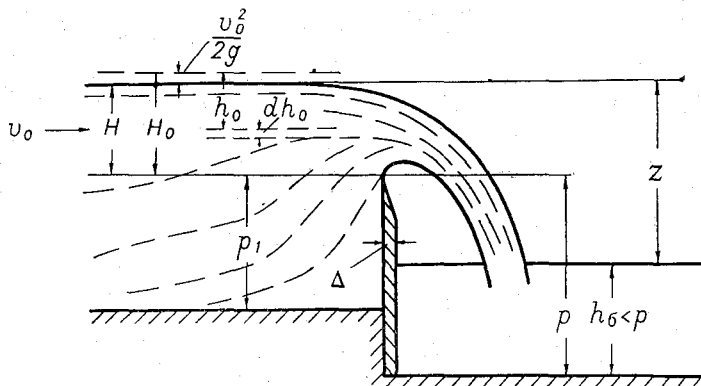


Рис. 8.5. Водослив с тонкой стенкой.

Основными параметрами водослива являются следующие: ширина водослива b , измеряемая по длине ребра (гребня) водослива, через которое переливается вода, напор H — наибольшее

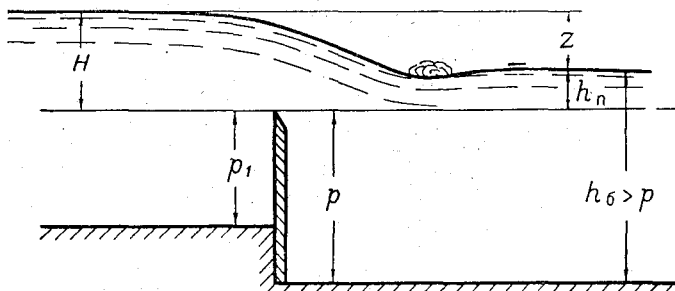


Рис. 8.6. Затопленный водослив с тонкой стенкой.

превышение горизонта воды перед водосливом над его гребнем (рис. 8.5) (напор измеряется на расстоянии не менее двух-трех H от стенки водослива вверх по течению), ширина порога или толщина гребня Δ и форма его профиля.

По профилю водосливной стенки все водосливы можно разделить на три типа: водосливы с тонкой стенкой, водосливы практических профилей и водосливы с широким порогом.

Перечисленные водосливы могут быть разделены на группы и по другим признакам. По характеру сопряжения струи с нижним бьефом водосливы подразделяются на незатопленные (рис. 8.5), когда уровень воды в нижнем бьефе не влияет на расход водослива, и затопленные (рис. 8.6), когда уровень нижнего бьефа оказывает влияние на расход воды через водослив, обуславливая его снижение. По расположению порога в плане различают: прямые водосливы, расположенные нормально к оси потока; косые, расположенные под углом к оси потока, и боковые водосливы, расположенные параллельно оси потока. Условия подхода потока к водосливу определяют отсутствие или наличие бокового сжатия, при котором ширина водослива b меньше ширины потока B .

По форме выреза в стенке водосливы с тонкой стенкой подразделяются на прямоугольные, треугольные, трапециевидные и криволинейные (параболические и радиальные) (рис. 8.7).

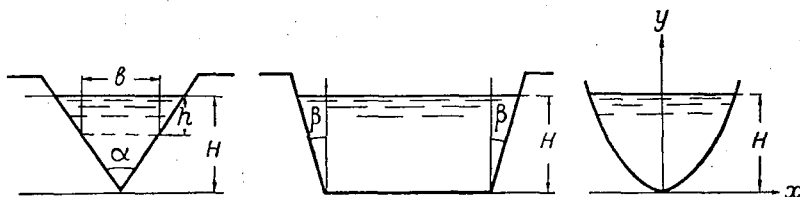


Рис. 8.7. Виды тонкостенных водосливов.

Выведем основную формулу расхода через тонкостенный незатопленный водослив со свободной струей без бокового сжатия. Истечение через такой водослив можно рассматривать как предельный случай истечения через большое отверстие, когда погружение его верхней кромки под уровень жидкости равно нулю ($H_1=0$). Как мы уже знаем, уравнение для определения расхода через большое отверстие имеет вид

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{H_{01}}^{H_{02}} b \sqrt{h_0} dh_0$$

(обозначения даны в § 1 настоящей главы).

Для случая истечения через водослив для верхней точки имеем $H_{01} = \frac{v_0^2}{2g}$, поэтому уравнение принимает вид

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{\frac{v_0^2}{2g}}^{H_{02}} b \sqrt{h_0} dh_0. \quad (8.28)$$

Формула (8.28) является основной для определения расхода через водослив. Без учета скорости подхода v_0 она записывается следующим образом:

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_0^H b \sqrt{h} dh. \quad (8.29)$$

Для прямоугольного водослива $b = \text{const}$; интегрирование уравнения (8.28) при этом дает

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[H_0^{3/2} - \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right]. \quad (8.30)$$

В расчетных формулах скорость подхода воды к гребню водослива обычно учитывается коэффициентом расхода m_0 . Полный же напор H_0 в них заменяется статическим напором H . В соответствии с этим формула (8.30) для определения расхода через затопленный водослив с тонкой стенкой без бокового сжатия может быть записана в виде

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}. \quad (8.31)$$

Для определения коэффициента расхода m_0 существует ряд эмпирических формул; наиболее рациональной является формула, рекомендованная в «Технических условиях и нормах проектирования гидротехнических сооружений. Гидравлические расчеты водосливов» (ТУ и Н, 1952 г.),

$$m_0 = 0,402 + 0,054 \frac{H}{p_1}. \quad (8.32)$$

Здесь p_1 — высота ребра водослива со стороны верхнего бьефа. Эта формула применима, если $p_1 \geq 0,5 H$, причем $H \geq 0,1$ м.

Заметим, что в упомянутых указаниях учтены результаты исследований, выполненных отечественными учеными (А. Р. Березинским, Д. И. Куминым, А. С. Офицеровым, М. Д. Чертоусовым, Р. Р. Чугаевым и др.), и даны рекомендации по расчету водосливов, получивших наибольшее распространение в практике гидротехнического строительства.

Расход через затопленный водослив с тонкой стенкой (рис. 8.6) определяется по следующей формуле:

$$Q = \sigma m_0 \sqrt{2g} H^{3/2}. \quad (8.33)$$

Эта формула отличается от формулы для расхода через незатопленный водослив (8.31) наличием коэффициента затопле-

ния σ , определяемого по следующему эмпирическому соотношению:

$$\sigma = 1,05 \left(1 + 0,2 \frac{h_{\Pi}}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}}, \quad (8.34)$$

в котором h_{Π} — высота подтопления, т. е. превышение уровня воды в нижнем бьефе над порогом водослива; z — разность уровней в верхнем и нижнем бьефах; p — высота ребра водослива со стороны нижнего бьефа.

Следует иметь в виду, что водослив считается затопленным в том случае, если уровень в нижнем бьефе стоит выше гребня водослива $h_6 > p$ и сопряжение переливающейся струи с уровнем нижнего бьефа происходит в форме надвинутого прыжка. При сопряжении в виде отогнанного прыжка уровень в нижнем бьефе не оказывает влияния на истечение через водослив. Опыты Базена показали, что при истечении через прямоугольный водослив отогнанный прыжок образуется при относительной величине перепада $\frac{z}{p}$, превышающей 0,7. Обозначения z и p показаны на

рис. 8.6. Более полно и точно условие затопления определяется на основании теории гидравлического прыжка.

Если ширина ребра водослива b меньше ширины подводящего канала B , то переливающаяся через водослив струя испытывает боковое сжатие. В результате этого происходит снижение величины расхода через водослив. Коэффициент расхода через водослив с боковым сжатием определяется по следующей эмпирической формуле:

$$m_c = \left[0,405 + \frac{0,0027}{H} - 0,030 \frac{B-b}{B} \right] \times \\ \times \left[1 + 0,55 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{H}{H+p_1} \right)^2 \right]. \quad (8.35)$$

Рассмотрим теперь вывод формулы для расхода воды через треугольный водослив с тонкой стенкой, который имеет вырез в форме обращенного вершиной вниз равнобедренного треугольника с углом α . Ширина отверстия водослива меняется с глубиной по зависимости

$$b = 2a(H - h), \quad (8.36)$$

где $a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Пренебрегая скоростью подхода, что допустимо, когда подходной канал к водосливу достаточно широк и глубокий, подставим

в уравнение (8.29) значение ширины водослива b по формуле (8.36)

$$Q = \mu a \sqrt{2g} \left[H \int_0^H \sqrt{h} dh - \int_0^H h^{3/2} dh \right].$$

Выполнив интегрирование, находим

$$Q = \frac{4}{3} \mu a \sqrt{2g} H^{5/2} - \frac{4}{5} \mu a \sqrt{2g} H^{5/2},$$

откуда окончательно получаем

$$Q = \frac{8}{15} \mu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} H^{5/2}. \quad (8.37)$$

При небольших напорах (от 0,05 до 0,25 м) коэффициент расхода μ в среднем равен 0,6. Если при этом $\alpha = 90^\circ$ и соответственно $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$, то формула для определения расхода принимает вид

$$Q = 1,4 H^{5/2}. \quad (8.38)$$

Треугольные водосливы с тонкой стенкой имеют широкое применение в гидromетрической практике, так как позволяют производить измерения расхода с высокой точностью в весьма широком диапазоне, включая и очень малые расходы. По той же причине такие водосливы применяются в гидравлических лабораториях.

Трапециевидные водосливы с тонкой стенкой применяются для измерения расходов в ирригационных каналах, при этом наибольшее распространение получили водосливы с коэффициентом откоса боковых стенок $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$ (рис. 8.7).

Рассматривая трапециевидный водослив как совокупность прямоугольного и треугольного водосливов, можем записать следующую формулу для определения расхода через него:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H^{3/2} + \frac{8}{15} \mu \operatorname{tg} \beta \sqrt{2g} H^{5/2}. \quad (8.39)$$

При $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$ получим

$$Q = \mu \sqrt{2g} H^{3/2} \left(\frac{2}{3} b + \frac{2}{15} H \right).$$

Чиолетти показал, что при $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$ влияние бокового сжатия компенсируется наклоном боковых граней, и дал очень про-

стую формулу для определения расхода через трапецидальный водослив

$$Q = 1,86bH^{3/2}. \quad (8.40)$$

Эта формула применима для незатопленного водослива со свободным доступом воздуха под струю. Ширина водослива понизу должна быть не меньше тройного напора, т. е. $b \geq 3H$.

Параболический водослив с вырезом по параболе второй степени $x^2 = 2py$ (рис. 8.7) характеризуется устойчивостью коэффициента расхода и простотой расчетной формулы

$$Q = kH^2. \quad (8.41)$$

Коэффициент расхода k зависит от очертаний водослива, определяемого параметром p , и находится путем тарировки.

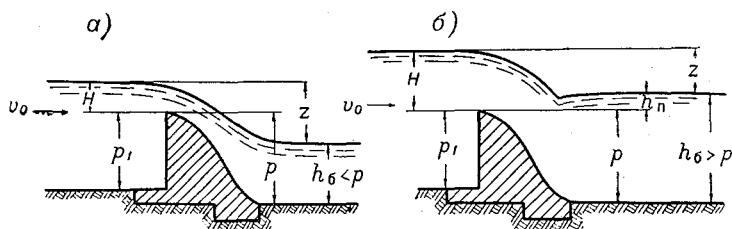


Рис. 8.8. Водослив практического профиля.

a — незатопленный, *б* — затопленный.

Теперь рассмотрим водосливы практического профиля (рис. 8.8), которые широко используются в гидротехнике. В зависимости от назначения сооружения водосливы могут иметь различные очертания профиля: криволинейное, прямоугольное, полигональное и др. Наибольшее распространение получили водосливы с криволинейным профилем, очерченным по форме переливающейся струи. К этому типу водосливов относятся водосливные сооружения плотин многих крупных и средних ГЭС.

Основная формула для определения расхода через незатопленный водослив практического профиля аналогична формуле для водослива с тонкой стенкой. В практических расчетах необходимо учитывать скорость подхода к водосливной плотине и боковое сжатие струи, поэтому формула записывается в следующем виде:

$$Q = \varepsilon mb \sqrt{2g} H_0^{3/2}. \quad (8.42)$$

Значение коэффициента расхода m зависит от очертания профиля водослива, величины напора и пр. При ориентировочных расчетах для водосливов криволинейных профилей можно

принимать $m=0,45 \div 0,49$, а для водосливов прямоугольного и полигонального профилей $m=0,40 \div 0,43$.

Коэффициент бокового сжатия ε можно определять по формуле Е. А. Замарина

$$\varepsilon = 1 - a \frac{H_0}{H_0 + b}, \quad (8.43)$$

где a — коэффициент, учитывающий форму устоев или быков, между которыми расположен водослив. Для быков прямоугольной формы $a=0,2$, для овальной или заостренной формы $a=0,1$, для быков особенно удобообтекаемой формы $a=0,06$.

Определение расхода через затопленный водослив практического профиля производится по формуле (8.42), в которую вводится коэффициент затопления $\sigma < 1$. Расчетная формула приобретает вид

$$Q = \sigma \varepsilon m b \sqrt{2g} H_0^{3/2}. \quad (8.44)$$

Водослив практического профиля затоплен, если $h_6 > p$, $\frac{z}{p} < 0,7$ и $\frac{h_{\Pi}}{H} > 0,4$.

Численные значения σ определяются в зависимости от величины относительного затопления, выражающегося дробью $\frac{h_{\Pi}}{H}$ (табл. 8.1, обозначения см. на рис. 8.8). При необходимости более точного определения коэффициентов расхода, бокового сжатия и затопления следует пользоваться упомянутыми выше ТУ и Н (1952 г.), в которых приведены расчетные формулы, таблицы и графики этих величин.

Таблица 8.1

Значения коэффициента затопления σ водослива практического профиля криволинейного очертания

$\frac{h_{\Pi}}{H}$	σ	$\frac{h_{\Pi}}{H}$	σ
0,1	1,00	0,8	0,79
0,4	0,99	0,9	0,58
0,6	0,96	0,95	0,41
0,7	0,91	1,0	0,00

При выборе методики расчета коэффициентов m , ε и σ для водосливов практического профиля необходимо предварительно установить наличие или отсутствие вакуума между поверхностью профиля водослива и переливающейся через нее струей. Замечено, что наличие вакуума под струей на гребне водослива несколько увеличивает нагрузку на плотину. В связи с последним

обстоятельством в гидротехнической практике обычно предпочитают водосливы безвакуумного профиля.

Большое практическое применение имеют так называемые водосливы с широким порогом (правильнее было бы сказать с длинным порогом) — это водосливы прямоугольного профиля, когда длина порога δ оказывается в 2—3 раза больше напора H (рис. 8.9).

Рассмотрим движение жидкости через незатопленный водослив указанного типа без бокового сжатия. Основной особен-

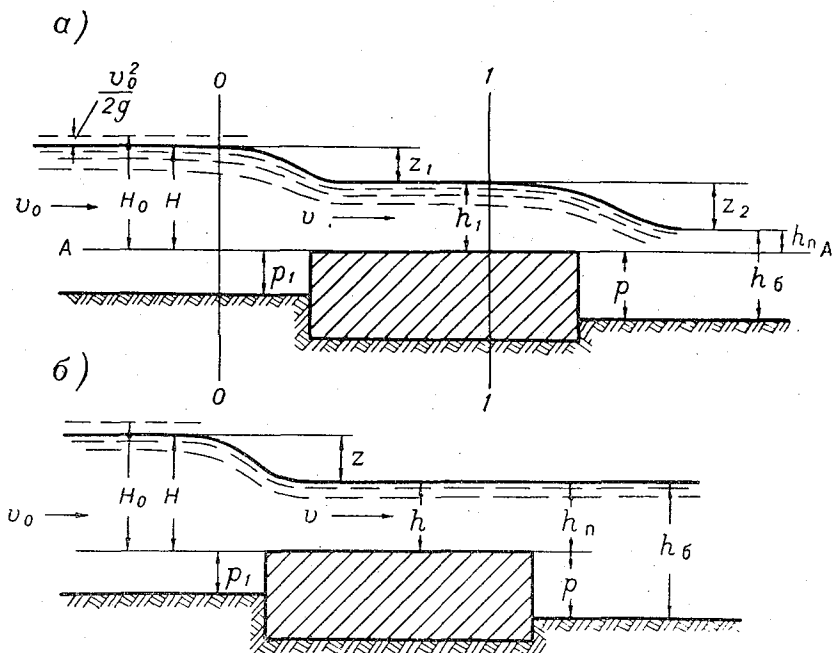


Рис. 8.9. Водосливы с широким порогом.
а — незатопленный, б — затопленный.

ностью незатопленного водослива с широким порогом является наличие двух перепадов уровня переливающейся жидкости: одного при входе на водослив, другого — на выходе с водослива. Между этими перепадами жидкость течет по горизонтальному порогу и уклон ее поверхности близок к нулю.

Запишем уравнение Бернулли для сечения 0—0, расположенного перед водосливом до снижения горизонта и сечения 1—1 на пороге водослива (рис. 8.9 а). За плоскость сравнения примем плоскость А—А, совпадающую с горизонтальной плоскостью порога

$$H + \frac{v_0^2}{2g} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \Delta h_{0-1}.$$

Здесь Δh_{0-1} — потери напора, затрачиваемые на преодоление сопротивления на участке между сечениями 0—0 и 1—1; остальные обозначения указаны на рис. 8.9.

Принимаем

$$\Delta h_{0-1} = \zeta_* \frac{v_1^2}{2g},$$

где ζ_* — суммарный коэффициент потерь.

Заменяв сумму $H + \frac{v_0^2}{2g}$ полным напором H_0 , получим

$$H_0 - h_1 = \frac{v_1^2}{2g} (\alpha + \zeta_*).$$

Отсюда находим скорость на пороге водослива

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_*}} \sqrt{2g(H_0 - h_1)}.$$

Обозначив $\frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_*}} = \varphi$ (где φ — коэффициент скорости),

получим выражение для расхода воды через водослив

$$Q = \omega_1 v_1 = \omega \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_1)}, \quad (8.45)$$

где ω_1 — площадь живого сечения на пороге водослива.

Для прямоугольного водослива $\omega_1 = bh_1$, поэтому

$$Q = \varphi b h_1 \sqrt{2g(H_0 - h_1)}. \quad (8.46)$$

Для определения расхода по формуле (8.46) необходимо знать, кроме ширины водослива b и напора H_0 , глубину на пороге h_1 и коэффициент скорости φ , который зависит от формы передней грани порога и шероховатости.

Для удобства расчета формулу (8.46) можно преобразовать, обозначив $h_1/H_0 = k$, тогда

$$Q = \varphi b H_0^{3/2} k \sqrt{2g(1 - k)}.$$

Обозначив $\varphi k \sqrt{1 - k} = m$ (где m — коэффициент расхода), получаем такую запись расчетной формулы для незатопленного водослива с широким порогом:

$$Q = m b \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (8.47)$$

или в более сокращенной форме

$$Q = M b H_0^{3/2}, \quad (8.48)$$

где $M = m \sqrt{2g}$.

Как видим, формула для расхода через водослив с широким порогом имеет ту же структуру, что и формула для тонкостенного прямоугольного водослива.

Коэффициент расхода m зависит от формы входного ребра порога, шероховатости порога, соотношения между напором H и высотой порога p , а также от некоторых других факторов. Численные значения коэффициентов φ , m и M даны в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Коэффициенты φ , m и M незатопленного водослива с широким порогом

Описание порога водослива	φ	m	M
Весьма обтекаемая форма входной части порога при весьма плавном подходе	0,95	0,36	1,60
Порог с закругленным входным ребром . . .	0,94	0,35	1,55
Порог без закругленного входного ребра . . .	0,90	0,33	1,48
Порог без закругления, неровный, сильно шероховатый вход . . .	0,85	0,30	1,33

Другой метод решения задачи о водосливе с широким порогом рассмотрен в работах Буссинеска и Бахметева. Этот метод основан на том, что глубина h на водосливе с широким порогом должна быть критической. В соответствии с теорией неравномерного движения в этом случае и все другие элементы движения должны быть критическими и связаны с расходом следующим уравнением:

$$\frac{\omega_k^3}{B_k} = \frac{Q^2}{g}$$

Для случая прямоугольного сечения русла на пороге получаем

$$Q = b \sqrt{gh_k^3},$$

где b — ширина водослива.

Не останавливаясь на ходе решения, укажем, что в результате получается та же самая зависимость для расхода, которая получена выше иным путем, а именно зависимость (8.46).

При затопленном водосливе (рис. 8.9 б) глубина на пороге будет

$$h = h_0 - p.$$

Здесь h_6 — глубина в нижнем бьефе, p — высота ребра водослива со стороны нижнего бьефа.

Подставив в формулу (8.46) величину h вместо h_1 , получаем

$$Q = \varphi b h \sqrt{2g(H_0 - h)}. \quad (8.49)$$

Исследования Р. Р. Чугаева показали, что водослив с широким порогом следует считать затопленным, если высота подтопления

$$h_n > k_1 H_0,$$

где коэффициент k_1 — «критерий подтопления» находится в пределах $0,75 \leq k_1 \leq 0,85$.

Следует иметь в виду, что приведенные выше зависимости довольно грубо оценивают движение потока через водослив с широким порогом. Если ширина водослива b меньше ширины подводящего канала B , то в формулы для определения расхода через водослив с широким порогом необходимо вводить коэффициент бокового сжатия $\varepsilon = \frac{b_c}{b}$, где b_c — ширина сжатого сечения, b — ширина водослива. Коэффициент ε можно определить по формуле (8.43). Уточненные значения коэффициентов для расчета расхода через водосливы с широким порогом приведены в ТУ и Н (1952 г.).

Формулы для определения расхода через водослив с широким порогом при учете бокового сжатия используются для расчета отверстий плотин, малых мостовых отверстий, водоспусков, шлюзов-регуляторов ирригационных каналов и других гидротехнических сооружений, в число которых входят и сооружения, не имеющие порога, возвышающегося над дном подводящего канала. В последнем случае напор перед отверстиями образуется в результате бокового сжатия потока устоями, или быками.

Исследования показали, что с гидравлической точки зрения движение воды через такие отверстия аналогично истечению через затопленный водослив с широким порогом. Коэффициент бокового сжатия ε принимается таким же, как и для водосливов с широким порогом.

При расчете отверстий малых мостов исходной величиной является наибольшая скорость течения под мостом, допустимая с точки зрения прочности сооружения. В соответствии с этим расчетным формулам придается иной вид, позволяющий непосредственно определить габариты отверстий моста, обеспечивающие пропуск расчетного расхода при принятой предельно допустимой скорости течения.

Расчет труб под малыми мостами или дорожными насыпями выполняется в зависимости от размеров труб и предполагаемого характера течения в трубе (напорное или безнапорное) по формулам истечения из отверстий или формулам водосливов.

§ 4. Истечение жидкости из-под щита

Для регулирования сброса воды через гидротехнические сооружения отверстия последних перекрывают щитами. В зависимости от расположения щитов различают следующие типы щитовых отверстий: щитовое отверстие перед перепадом, щитовое отверстие на широком пороге, щитовое отверстие на гребне водослива и щитовое отверстие без перепада (в горизонтальном канале). В трех первых типах отверстий, характеризующихся наличием перепада, горизонт воды в нижнем бьефе обычно не влияет на истечение струи из-под щита и расчет ведется по формулам истечения через большие отверстия.

Рассмотрим истечение через щитовое отверстие в горизонтальном лотке (рис. 8.10). Если горизонт воды в нижнем бьефе стоит ниже верхней кромки отверстия и не влияет на истечение струи, происходит свободное истечение. Если горизонт нижнего бьефа оказывает влияние на истечение, последнее называется несвободным. При этом следует различать случаи затопленного и подтопленного истечения.

Остановимся вначале на свободном истечении (рис. 8.10 *a*). При неполном поднятии щита вытекающая из-под него струя испытывает сжатие в вертикальном направлении, при этом глубина в сжатом сечении $h_c = \varepsilon' a$, где a — высота отверстия, ε' — коэффициент сжатия, зависящий от относительного открытия щита $\frac{a}{H}$ и изменяющийся от 0,62 до 0,70.

Обозначив полный напор (с учетом скорости подхода) в сечении перед щитом через H_0 , глубину в сжатом сечении через h_c и применив к этим двум сечениям уравнение Бернулли, получим следующее выражение для скорости воды в сжатом сечении:

$$v_c = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_c)}. \quad (8.50)$$

Поскольку щитовые отверстия имеют обычно прямоугольную форму, площадь сжатого сечения $\omega_c = h_c b = \varepsilon' ab$. Формула для определения расхода записывается в следующем виде:

$$Q = \varphi \varepsilon' ab \sqrt{2g(H_0 - \varepsilon' a)}; \quad (8.51)$$

для щитового отверстия без порога $\varphi = 0,85$.

Перейдем к рассмотрению несвободного истечения из-под щита. При подтопленном истечении глубина непосредственно за щитом h_z оказывается больше h_c , но меньше, чем глубина h_0 в отводящем канале (на рисунке этот случай не показан). Расход определится перепадом между уровнями воды перед щитом и непосредственно за щитом и вычисляется по формуле

$$Q = Mba \sqrt{2g(H_0 - h_z)}. \quad (8.52)$$

Величина h_z находится по заданным значениям H_0 , h_6 и a по формуле

$$h_z = \sqrt{h_6^2 - M \left(H_0 - \frac{M}{4} \right)} + \frac{M}{2},$$

где

$$M = 4\mu^2 a^2 \frac{h_6 - h_c}{h_6 h_c}, \text{ причем } h_c = \varepsilon' a.$$

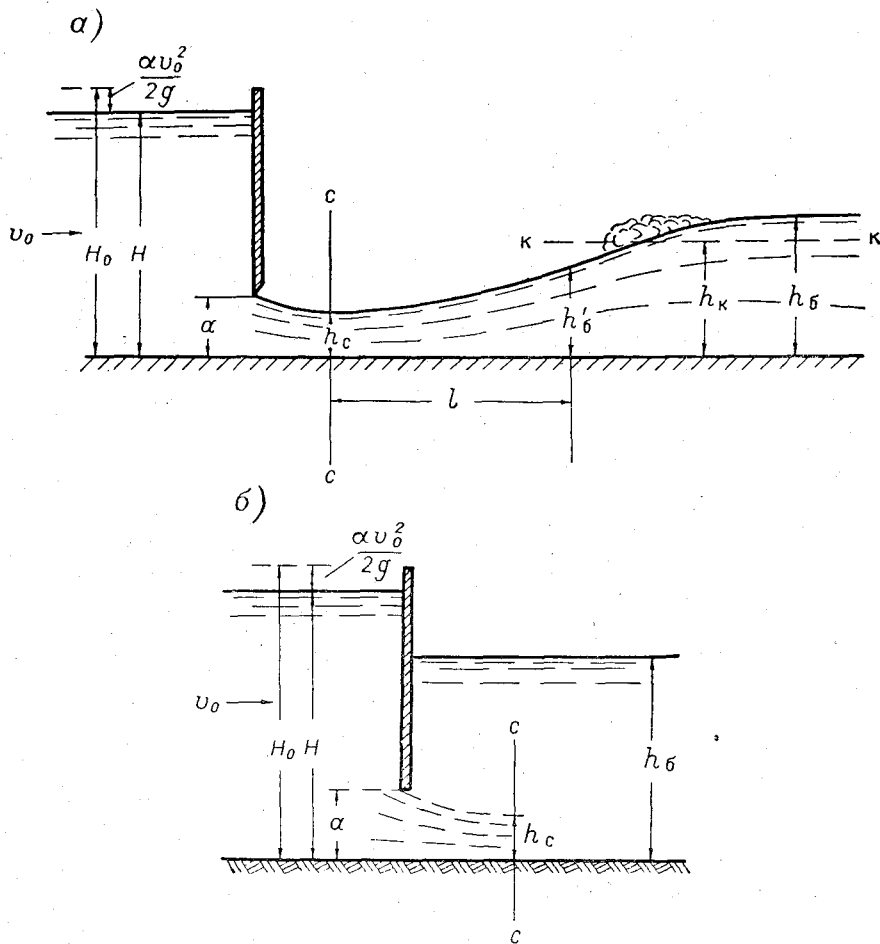


Рис. 8.10. Истечение жидкости из-под щита в горизонтальной лотке.

a — свободное, $б$ — затопленное (на рис. «б» пунктиром показан вид струи при свободном истечении на участке от щита до сжатого сечения cc).

При затопленном истечении (рис. 8.10 б) глубина за щитом равна глубине в отводящем канале ($h_z = h_6$); формула для определения расхода принимает вид

$$Q = \mu_b a \sqrt{2g(H_0 - h_6)}. \quad (8.53)$$

На примере истечения из-под щита кратко рассмотрим основные формы сопряжения бьефов. Выше отмечалось, что при истечении из-под щита струя испытывает сжатие. Глубина в сжатом сечении обычно меньше критической глубины ($h_c < h_{кр}$), поэтому в сжатом сечении поток находится в бурном состоянии. Если в нижнем бьефе уклон дна меньше критического, то на некотором расстоянии от сооружения бытовая глубина будет больше критической ($h_6 > h_{кр}$) и поток будет находиться в спокойном состоянии.

Нам уже известно, что переход от бурного режима к спокойному происходит через гидравлический прыжок (см. главу VII). Минимальную глубину в сжатом сечении можем рассматривать как первую сопряженную глубину (h_{c1}) потока перед прыжком. По этой глубине может быть определена и вторая сопряженная глубина (h_{c2}) за гидравлическим прыжком. Различают три основных типа сопряжения бьефов: с отогнанным прыжком, с надвинутым прыжком и с затопленным прыжком.

Отогнанным прыжком называется такая форма сопряжения, при которой прыжок располагается на некотором расстоянии от сжатого сечения. Этот случай имеет место, если вторая сопряженная глубина h_{c2} больше бытовой глубины h_6 , устанавливающейся в нижнем бьефе. При этом на участке от сжатого сечения С—С с глубиной h_c до сечения I—I с глубиной h'_6 формируется кривая подпора, которая заканчивается прыжком, сопрягающим две взаимные глубины h'_6 и h_6 (рис. 8.10 а).

Надвинутым прыжком называется такая форма сопряжения, когда прыжок образуется непосредственно у сжатого сечения и сопрягает глубины h_c и h_6 . Этот тип сопряжения имеет место при $h_{c2} = h_6$ (на рис. 8.10 не показан).

При затопленном прыжке сжатое сечение затопляется и глубина в нем равна бытовой глубине $h_c = h_6$ (рис. 8.10 б). Этот тип сопряжения имеет место при $h_{c2} < h_6$. С гидротехнической точки зрения затопленный прыжок является наиболее благоприятным типом сопряжения, так как при этом в отводящем канале не образуются значительных скоростей, требующих прочного крепления русла. Неблагоприятным в этом отношении является отогнанный прыжок, при котором на всей длине отгона прыжка возникают весьма значительные скорости.

НЕРАВНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В РЕКАХ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Основные зависимости, используемые при изучении неравномерного течения в реках

В главе I указывалось, что неравномерный режим течения является характерным для речных потоков, русло которых отличается значительными изменениями поперечного сечения и уклона по длине. В связи с этим короткие участки рек, как правило, должны изучаться при использовании зависимостей, учитывающих неравномерность течения.

В отношении больших участков рек в указанной главе отмечалось, что при обычном чередовании уменьшений и увеличений поперечного сечения русла течения на них может рассматриваться как равномерное. К категории неравномерного движения речного потока были отнесены случаи односторонних изменений по длине потока скорости течения, средней глубины, площади сечения и уклона. Такие односторонние изменения наблюдаются в зоне влияния плотины, где имеет место явно выраженное замедленное течение, а свободная поверхность принимает форму кривой подпора. То же явление образования подпорной кривой имеет место на реке при ее слиянии с другим потоком, на котором в данный момент проходит паводок, или при ее впадении в водоем, в период повышенного уровня в последнем. Ускоренное течение с формированием кривой спада наблюдается на реке, впадающей в водоем, уровни которого в рассматриваемый период оказываются ниже обычного. Кривая спада образуется на реке в период паводка, если она впадает в реку на участке, находящемся ниже регулирующего сток водохранилища.

Задачи о расчете неравномерного движения речных потоков сводятся к расчету кривых свободной поверхности. Получив такие кривые, можно легко найти все необходимые величины, характеризующие гидравлику потока на любом профиле в пределах охваченной расчетом части реки. Расчет (или, как говорят, построение) кривой свободной поверхности является основой гидравлических расчетов неравномерного движения.

Речные потоки всегда имеют русло, ширина которого во много раз превышает глубину, поэтому в гидравлических уравнениях, применяемых к таким потокам, гидравлический радиус R заменяется средней глубиной $H_{\text{ср}}$.

Уравнение неравномерного движения речного потока записывается в виде

$$I = \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha v_{\text{ср}}^2}{2g} \right) + \frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 H_{\text{ср}}} \quad (9.1)$$

Уклон водной поверхности I можно выразить через разность отметок $\Delta\zeta$ водной поверхности в двух створах, находящихся на расстоянии Δx друг от друга, т. е. написать

$$I = - \frac{\Delta\zeta}{\Delta x}.$$

Уравнение неравномерного движения для участка реки длиной Δx приобретает вид

$$-\Delta\zeta = \frac{\alpha}{2g} \Delta (v_{cp}^2) + \frac{v_{cp}^2}{C^2 H_{cp}} \Delta x. \quad (9.2)$$

Предполагается, что последний член уравнения учитывает как линейные, так и местные потери напора. Местные потери, обусловленные чередованием сужений и расширений русла, оказываются учтенными путем использования соответствующих значений коэффициента шероховатости n в формуле Маннинга

$$C = \frac{1}{n} H_{cp}^{1/6}. \quad (9.3)$$

В таблице значений n , составленной М. Ф. Срибным (см. главу III), приближенно учитываются именно линейные и местные сопротивления по характеристике русла реки, степени его неровности, извилистости и т. д. При составлении этой таблицы величины n вычислялись по гидравлической формуле по данным измерения уклона, расхода и площади поперечного сечения реки, ее ширины, средней глубины русла. Получение различных значений n для различных видов русла обнаруживает влияние на сопротивление потока как собственно шероховатости русла, так и особенностей его формы. Разумеется, эти особенности учитываются не всегда достаточно полно.

В формулах, учитывающих связь n только с зернистой шероховатостью (например в формуле Штриклера), особенности формы русла вовсе не учитываются. Тем не менее во многих случаях применение такого рода формул дает удовлетворительный результат. По-видимому, можно считать, что линейные потери напора в речных потоках часто оказываются преобладающими.

Если в расчетах применяются значения коэффициентов шероховатости n , полученные по данным непосредственных измерений при использовании формулы

$$n = \frac{H_{cp}^{2/3} I^{1/2}}{v_{cp}}, \quad (9.4)$$

то можно быть уверенным, что для условий, не очень отличающихся от тех, при которых произведено измерение входящих

в формулу (9.4) величин, будут учтены как линейные, так и местные потери напора.

При построении кривых свободной поверхности уравнение неравномерного движения относят к достаточно большим участкам длиной Δx , выражающейся для крупных рек километрами и десятками километров. Эти участки будем называть расчетными участками.

На протяжении расчетных участков имеет место заметное, а иногда и значительное изменение отметок свободной поверхности. В то же время относительное изменение живой силы оказывается небольшим даже в условиях неравномерного движения. Поэтому обычно при построении кривых свободной поверхности речных потоков изменением живой силы пренебрегают, а уравнение движения записывают следующим образом:

$$I = \frac{v_{\text{ср}}^2}{C^2 H_{\text{ср}}}, \quad (9.5)$$

или

$$I = \frac{Q^2}{K^2}, \quad (9.6)$$

где K — модуль расхода, определяемый формулой

$$K = \omega_{\text{ср}} C_{\text{ср}} \sqrt{H_{\text{ср}}},$$

в которой $\omega_{\text{ср}}$, $C_{\text{ср}}$ и $H_{\text{ср}}$ — средние значения площади поперечного сечения, коэффициента Шези и глубины на участке реки длиной Δx .

На первый взгляд может показаться странным, что уравнение (9.6), совпадающее с уравнением равномерного движения, способно отражать особый характер неравномерного течения в речном потоке и может быть применено для построения кривых подпора и спада. Если, однако, рассмотреть свойства этого уравнения, то легко заметить, что, приняв в нем $Q = \text{const}$ (как это и делается при построении кривых свободной поверхности в случае установившегося режима), получаем следующую взаимосвязь между уклоном свободной поверхности I и модулем расхода:

$$IK^2 = Q^2 = \text{const}.$$

Для случая равномерного режима течения содержащиеся в левой части равенства величины I и K могут быть помечены индексами «0», указывающими на то, что величины являются нормальными и при этом $I = i$ (i — уклон дна). Очевидно, это будет предельным случаем.

При неравномерном режиме в зоне подпора K всегда больше, чем K_0 , поэтому $I < I_0$. Перемещаясь, например, от плотины

вверх по течению, мы будем получать все меньшие и меньшие значения K , в связи с чем величины I будут возрастать. Такое возрастание будет продолжаться до тех пор, пока на определенном расстоянии от плотины уклон I не окажется практически равным I_0 , т. е. течение будет равномерным.

Уравнение (9.6) используется как основное в практике построения кривых свободной поверхности речных потоков. Следует заметить, однако, что в некоторых особых случаях для этой цели используется и полное уравнение неравномерного движения (9.2), в котором учитывается изменение кинетической энергии по длине потока.

Уклон свободной поверхности может быть выражен как через разность отметок Δz , так и через падение свободной поверхности

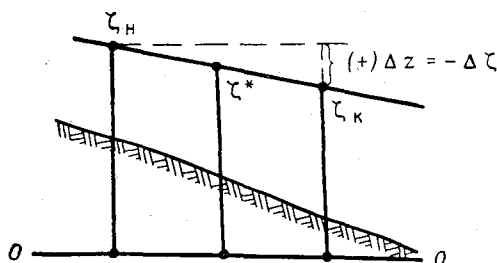


Рис. 9.1.

Δz , которое принимается положительным при снижении уровня по длине реки. Таким образом, можно написать

$$\Delta z = -\Delta \zeta = \zeta_n - \zeta_k, \quad (9.7)$$

где ζ_n — отметка свободной поверхности в начале расчетного участка длиной Δx , ζ_k — то же в конце участка.

Формулу (9.6) можно записать следующим образом:

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{K^2} Q^2, \quad (9.8)$$

или

$$\Delta z = F Q^2. \quad (9.9)$$

Это — основная расчетная формула, используемая для построения кривых свободной поверхности рек. В ней принято

$$F = \frac{\Delta x}{K^2}, \quad (9.10)$$

где F — модуль сопротивления, являющийся функцией среднего уровня на расчетном участке реки длиной Δx . Средний уровень

на участке будем обозначать через ζ^* (рис. 9.1), он вычисляется по формуле

$$\zeta^* = \frac{1}{2} (\zeta_n + \zeta_k), \quad (9.11)$$

или

$$\zeta^* = \zeta_k + \frac{\Delta z}{2}. \quad (9.12)$$

Уровень в начале участка определяется следующим образом:

$$\zeta_n = \zeta_k + \Delta z. \quad (9.13)$$

В основе методов построения кривой свободной поверхности лежит постулат инвариантности модуля сопротивления, согласно которому модуль сопротивления не зависит от уклона (или, иначе, от падения), а полностью определяется средним уровнем воды на расчетном участке. Этот постулат основан на данных натурных наблюдений.

§ 2. Основной метод построения кривых свободной поверхности речных потоков (метод А. Н. Рахманова)

Остановимся сперва на подготовке исходного материала к построению кривых свободной поверхности речных потоков. Подготовка заключается в следующем. Река делится на расчетные участки (по плану и продольному профилю). Для каждого расчетного участка находится осредненный типовой поперечный профиль и измеряется длина участка Δx при разных уровнях. Измерение Δx производится вдоль русла, а для высоких уровней — вдоль ориентировочного положения динамической оси потока.

Осредненный поперечный профиль находится путем совмещения на одном чертеже двух профилей и вычерчивания для них одного осредненного, который должен удовлетворять следующим требованиям: иметь площадь поперечного сечения, ширину и максимальную глубину соответственно равными средним значениям этих величин для совмещенных профилей. Осредненный профиль должен сохранять основные типичные черты формы совмещенных профилей. Средние из каждых двух профилей вновь совмещаются по два и опять осредняются. Такая операция продолжается до тех пор, пока не будет получен один осредненный типовой профиль для всего расчетного участка.

Наложение поперечных профилей на чертеж при осреднении необходимо производить путем совмещения горизонтальных линий, отвечающих уровням бытовой свободной поверхности реки на этих профилях. Бытовыми называют те характеристики по-

тока, которые относятся к его естественному, бытовому режиму, еще не зарегулированному. При наличии достаточных данных о продольном профиле поверхности реки выбирают продольный профиль, отвечающий среднему годовому значению расхода воды.

Средний поперечный профиль считается отнесенным к середине расчетного участка, где, как указывалось, значения уровня считаются средними для участка и обозначаются через ζ^* ; при этом принимается $\zeta^* = \frac{1}{2}(\zeta_{н} + \zeta_{к})$. По осредненному поперечному профилю каждого расчетного участка находятся при разных уровнях значения ω , B , $H_{ср}$ и C ; эти величины представляются в виде таблиц как функции среднего уровня на участке. При вычислении коэффициента Шези C используются значения коэффициента шероховатости n , найденные путем расчета по данным измерений, выполненных для бытового состояния реки, при отсутствии таких данных — по таблицам Срибного.

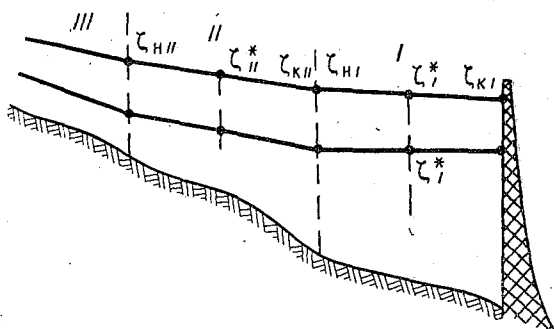


Рис. 9.2. Схема расположения расчетных участков при построении кривых подпора.

Нумерацию расчетных участков при построении кривой подпора удобно производить от плотины вверх по реке, а начало и конец участков принимать в направлении течения. Таким образом, расчетный участок I будет непосредственно примыкать своим концом к плотине, а начало его будет совпадать с концом расчетного участка II и т. д. (рис. 9.2).

Имея для каждого расчетного участка реки значения ω , $H_{ср}$ и C для разных уровней ζ^* , вычисляют для тех же уровней функцию модуля сопротивления F по формуле (9.10), которую можно записать так:

$$F = \frac{\Delta x}{C^2 \omega^2 H_{ср}}. \quad (9.14)$$

Для каждого участка строят графики функции $F(\zeta^*)$ (рис. 9.3). На этом заканчивается подготовка к построению кривых свободной поверхности.

Переходим к изложению предложенного А. Н. Рахмановым метода построения кривых свободной поверхности рек.

Расчет выполняется для заданного расхода реки Q и заданного уровня в конце нижнего по течению расчетного участка. Если речь идет о построении кривой подпора от плотины, то конец нижнего (I) расчетного участка, как указывалось, должен совпадать со створом плотины. Расчет и построение кривой свободной поверхности всегда выполняется снизу вверх по реке, т. е. против течения. Вычисления ведутся методом подбора. Имея заданное значение ζ_k для расчетного участка I , принимаем произвольно величину ζ^* на этом участке и снимаем с соответствующего графика функцию F . Подставляя значение F в формулу

$$\Delta z = FQ^2,$$

находим Δz и проверяем по равенству

$$\zeta^* = \zeta_k + \frac{\Delta z}{2},$$

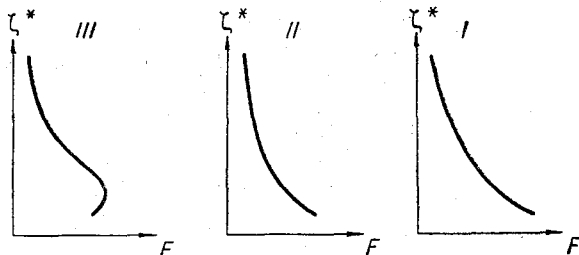


Рис. 9.3. Графики модуля сопротивления для расчетных участков.

правильно ли принято значение ζ^* . Если получилось различие между первоначально принятым и вычисленным ζ^* , то расчет повторяем, снимая F с графика уже при новом (вычисленном) значении ζ^* . Таким образом, подбором добиваемся схождения принятого и вычисляемого значения ζ^* . Одновременно находим и значение падения Δz .

После этого следует вычислить отметку в начале расчетного участка по формуле

$$\zeta_n = \zeta_k + \Delta z.$$

Найденная отметка в начале расчетного участка I является отметкой в конце участка II , т. е. $\zeta_{к II} = \zeta_{н I}$, поэтому оказывается возможным произвести расчет для участка II . В таком же порядке продолжается расчет для всех остальных расчетных участков.

§ 3. Методы построения кривых свободной поверхности, предложенные Н. Н. Павловским и Н. М. Бернадским

Неудобство метода Рахманова заключается в необходимости использования способа подбора. Поэтому многие авторы изучали возможность усовершенствования метода, стараясь придать ему такой вид, при котором расчет можно было бы выполнить без подбора. Наиболее известными из таких методов являются методы Н. Н. Павловского и Н. М. Бернадского.

Рассмотрим метод Павловского. Построим для расчетного участка реки график модуля сопротивления $F(\zeta^*)$ (рис. 9.4).

Очевидно, что длина отрезка BC , показанная на рисунке, равна модулю сопротивления, т. е. $BC = F$. Отложим на оси ординат вверх и вниз от точки C отрезки $\frac{\Delta z}{2}$ и обозначим концы этих отрезков соответственно ζ_H и ζ_K . Соединив точки ζ_H и ζ_K с точкой B , получим две линии, образующие с горизонтальной прямой BC угол φ . Очевидно, что $\zeta_H - \zeta_K = \Delta z$. Вводя тангенс угла φ , пишем

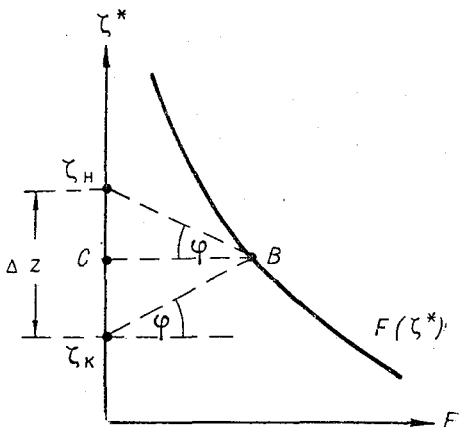


Рис. 9.4.

$$\frac{\Delta z}{2} = \overline{BC} \operatorname{tg} \varphi = F \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta z}{BC} = \frac{\Delta z}{F} = 2 \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.15)$$

Подставляя сюда $\Delta z = FQ^2$, приходим к формуле, позволяющей вычислить угол φ по его тангенсу

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q^2}{2}. \quad (9.16)$$

Поскольку зависимость (9.16) используется для построений на чертеже, она должна быть дополнена масштабами изображенных величин. Зависимость принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bQ^2}{2a}, \quad (9.17)$$

где a — масштаб уровня ($1 \text{ см} = a \text{ м}$), b — масштаб F ($1 \text{ см} = b \text{ сек}^2/\text{м}^5$).

Формула (9.17) используется при построении кривых свободной поверхности. Начертив график $F(\zeta^*)$ в масштабах a и b для

расчетных участков реки, откладываяем на ординате графика, относящегося к расчетному участку *I*, значение ζ_k , вычисляем $\operatorname{tg} \varphi$ по формуле (9.17) при использовании заданного значения Q , откладываяем угол φ (рис. 9, 4) и находим точку *B*; откладывая далее от линии \overline{BC} угол φ , как показано на рисунке, получаем искомую величину ζ_n для участка *I*. Найденная отметка ζ_n является одновременно ζ_k для следующего *II* расчетного участка. Переносим эту отметку на чертеж $F(\zeta^*)$ участка *II* и повторяем указанные выше операции.

В такой же последовательности выполняем построения и для остальных участков. Если чертежи для участков построены в раз-

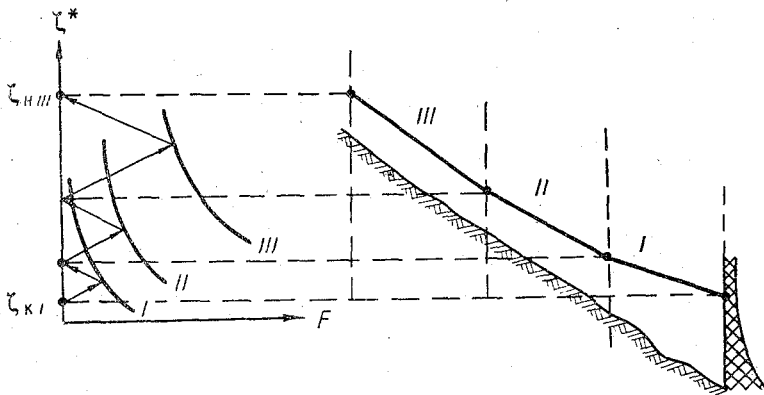


Рис. 9.5. Построение кривой свободной поверхности реки по методу Н. Н. Павловского.

личных масштабах, то это учитывается при определении $\operatorname{tg} \varphi$ путем использования особых значений a и b .

Особенно удобен метод Павловского, когда на одном чертеже удается в одном масштабе начертить графики модуля сопротивления всех расчетных участков рассматриваемой части реки. Схема построения по Павловскому одновременно для нескольких участков изображена на рис. 9.5. Исходным значением, как и прежде, является уровень в конце участка *I* (обозначен ζ_{kI}), например, у плотины; расчет ведется для постоянного расхода Q .

Переходим к изложению метода Бернадского, который ниже именуется методом опорных кривых.

Вместо графика модуля сопротивления $F(\zeta^*)$ можно построить график обратной величины $\Psi(\zeta)$, определяемой равенством (индекс * при ζ будем опускать)

$$\Psi = \frac{1}{F}; \quad (9.18)$$

НО МЫ ЗНАЕМ, ЧТО

$$F = \frac{\Delta z}{Q^2},$$

ПОЭТОМУ МОЖНО НАПИСАТЬ

$$\Psi = \frac{Q^2}{\Delta z}. \quad (9.19)$$

График этой величины изображен на рис. 9.6. Заштрихованная на рисунке площадь определяется таким выражением:

$$\Omega = \frac{Q^2}{\Delta z} \Delta z = Q^2. \quad (9.20)$$

Нетрудно видеть, что равенство (9.20) основано на формуле площади трапеции. Эта площадь равна произведению высоты трапеции на ее среднюю линию.

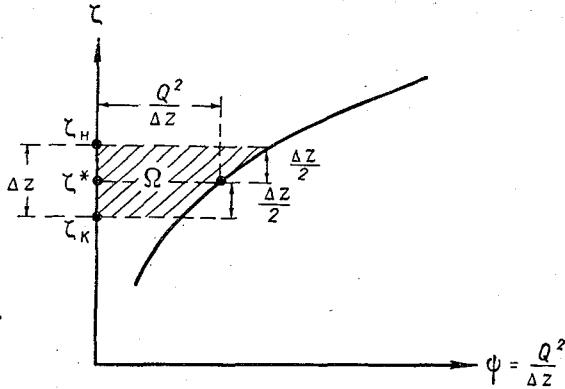


Рис. 9.6.

Итак, площадь, заключенная между графиком функции $\psi(\zeta)$ и осью ординат ζ на отрезке Δz , равна квадрату расхода. Теперь построим интегральный график функции $\psi(\zeta)$. Для этого всю площадь, заключенную между графиком $\psi(\zeta)$ и осью ординат, делим горизонтальными прямыми на частные площади (рис. 9.7), которые определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \Psi_1 \Delta z_1; & \Omega_2 &= \Psi_2 \Delta z_2; & \dots \\ \dots & \Omega_i &= \Psi_i \Delta z_i; & \dots & \Omega_n &= \Psi_n \Delta z_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

По частным площадям Ω_i строится интегральный график путем их суммирования от 0 до i -того значения $(\sum_0^i \Omega_i)$ (рис. 9.8).

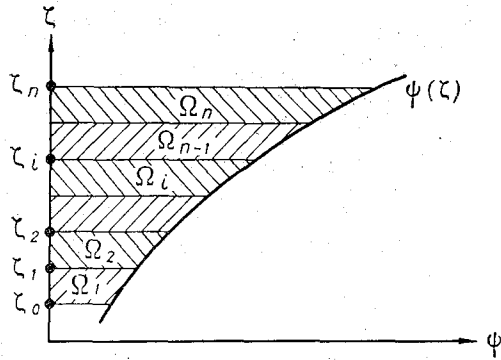


Рис. 9.7.

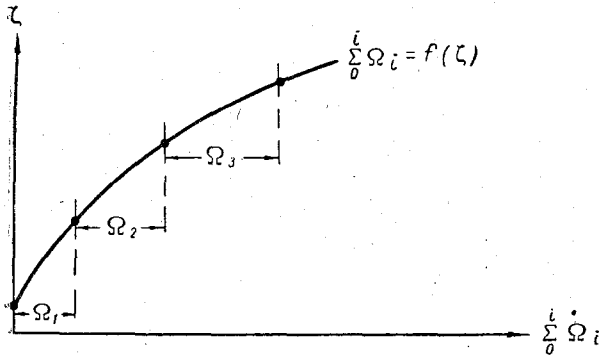


Рис. 9.8. Построение опорной кривой.

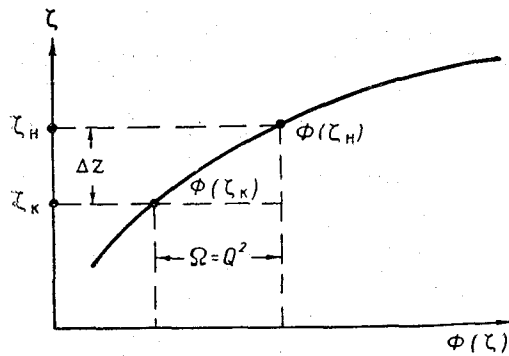


Рис. 9.9. Опорная кривая и ее применение для построения свободной поверхности по методу Н. М. Бернадского.

Этот интегральный график Бернадский назвал опорной кривой и ввел для него обозначение $\Phi(\zeta)$, т. е. принял

$$\Phi(\zeta) = \sum_0^l \Omega_i. \quad (9.22)$$

По опорной кривой можно найти квадрат расхода воды, а стало быть и расход по заданной разности отметок ζ_n и ζ_k на рассматриваемом участке реки. Можно решить и обратную задачу: по заданной отметке в конце участка ζ_k и расходу воды найти отметку в начале участка ζ_n (рис. 9.9).

Рисунок показывает, что

$$Q^2 = \Omega = \Phi(\zeta_n) - \Phi(\zeta_k),$$

т. е. квадрат расхода на участке реки равен разности значений опорной кривой, снятых при отметках уровня в начале и в конце участка. Расчетная формула записывается в виде

$$Q^2 = \Phi(\zeta_n) - \Phi(\zeta_k). \quad (9.23)$$

При построении кривой свободной поверхности вычерчивают для всех расчетных участков опорные кривые. Задаваясь расходом воды и отметкой в конце участка ζ_k , находим ζ_n . Такую операцию продельывают для всех расчетных участков, двигаясь от участка l вверх по реке.

§ 4. Построение свободной поверхности при учете поймы и бифуркации русла

Рассмотрим случай бифуркации русла. Положим, что на расчетном участке реки русло разделяется на два рукава: a и b (рис. 9.10). Длины этих рукавов между начальным и конечным поперечниками соответственно равны Δx_a и Δx_b . Падение на всем участке равно Δz , причем $\Delta z = \zeta_n - \zeta_k$. Падение для обоих рукавов общее, а уклоны на них будут разными, так как длины их различны

$$I_a = \frac{\Delta z}{\Delta x_a}, \quad I_b = \frac{\Delta z}{\Delta x_b}.$$

Полный расход воды Q складывается из расходов двух рукавов:

$$Q = Q_a + Q_b. \quad (9.24)$$

Расход в каждом рукаве реки можно выразить через произведение модуля расхода K на корень квадратный из уклона, т. е. написать:

$$\left. \begin{aligned} Q_a &= K_a \sqrt{\frac{\Delta z}{\Delta x_a}} ; \\ Q_b &= K_b \sqrt{\frac{\Delta z}{\Delta x_b}} . \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Подставляя значения Q_a и Q_b в формулу (9.24), получаем

$$Q = \left(K_a + K_b \sqrt{\frac{\Delta x_a}{\Delta x_b}} \right) \sqrt{\frac{\Delta z}{\Delta x_a}} . \quad (9.26)$$

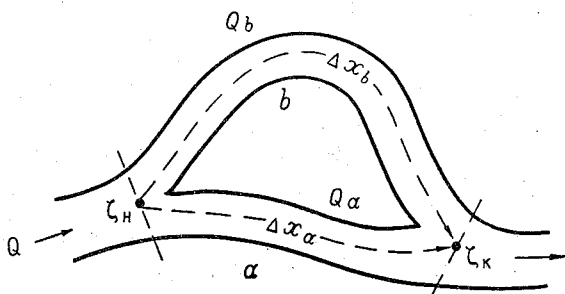


Рис. 9.10. Обозначения элементов потока при расчете бифуркации русла.

Введем общий (для двух рукавов) модуль расхода и обозначим его через $K_{\text{общ}}$, т. е. примем

$$K_{\text{общ}} = K_a + K_b \sqrt{\frac{\Delta x_a}{\Delta x_b}} . \quad (9.27)$$

Теперь вместо уравнения (9.26) напишем

$$Q = K_{\text{общ}} \sqrt{\frac{\Delta z}{\Delta x_a}} . \quad (9.28)$$

Возводя в квадрат и разрешая полученное уравнение относительно Δz , находим

$$\Delta z = \frac{\Delta x_a}{K_{\text{общ}}^2} Q^2 .$$

Введем обозначение

$$F_{\text{общ}} = \frac{\Delta x_a}{K_{\text{общ}}^2} . \quad (9.29)$$

Назовем $F_{\text{общ}}$ общим модулем сопротивления двух рукавов. При учете этого обозначения будем иметь

$$\Delta z = F_{\text{общ}} Q^2. \quad (9.30)$$

Основными расчетными формулами являются (9.27), (9.29) и (9.30). При построении кривых свободной поверхности рек участки бифуркации русла выделяются в отдельные расчетные участки, для которых строится график общего модуля сопротивления по формуле (9.29), а дальше расчет выполняется обычным способом.

Построение кривой свободной поверхности реки с развитой поймой (при затоплении последней) выполняется аналогичным образом. Выделяя русловую и пойменную части поперечного сечения потока и приписывая относящимся к ним величинам индексы «р» (русло) и «п» (пойма), записываем следующие расчетные формулы:

$$K_{\text{общ}} = K_p + K_n \sqrt{\frac{\Delta x_p}{\Delta x_n}}; \quad (9.31)$$

$$F_{\text{общ}} = \frac{\Delta x_p}{K_{\text{общ}}^2}. \quad (9.32)$$

Для вычисления падения применяется формула (9.30).

При наличии двух пойм формула общего модуля расхода записывается в виде

$$K_{\text{общ}} = K_p + K_{\text{л.п}} \sqrt{\frac{\Delta x_p}{\Delta x_{\text{л.п}}}} + K_{\text{п.п}} \sqrt{\frac{\Delta x_p}{\Delta x_{\text{п.п}}}}. \quad (9.33)$$

Индексами «л.п» обозначены величины, относящиеся к левой пойме, а индексами «п.п» — относящиеся к правой пойме. Расчет свободной поверхности выполняется по формулам (9.30), (9.32) и (9.33).

На судоходных реках осуществляются различные мероприятия, направленные на улучшение судоходных условий. На сильно извилистых реках часто производят спрямление русла. Возникает задача: выяснить, как изменится падение Δz на участке реки после разработок спрямления и как это повлияет на уровни, а стало быть и на судоходные глубины расположенного выше участка реки.

Предположим, что в бытовом состоянии, т. е. до разработки спрямления на некотором участке mn (рис. 9.11) при меженном расходе Q (обеспечивающем судоходные глубины) река имела падение $\Delta z_{\text{быт}}$. Очевидно, что

$$\Delta z_{\text{быт}} = F_a Q^2, \quad (9.34)$$

где F_a — модуль расхода излучины реки на участке mn , где должно быть произведено спрямление.

После разработки спрямления падение должно уменьшиться, оно будет равно $\Delta z_{\text{спр}}$ (рис. 9.11 б). Для случая спрямления, пользуясь рассмотренными выше соотношениями, записываем

$$\Delta z_{\text{спр}} = F_{\text{общ}} Q^2, \quad (9.35)$$

где $F_{\text{общ}}$ — общий модуль расхода для излучины (которая обычно не перекрывается) и спрямляющего рукава, вычисляемый по формулам (9.7) и (9.9). Модуль расхода для спрямляющего рукава K_b и величина Δx_b вычисляются по проектным данным спрямления.

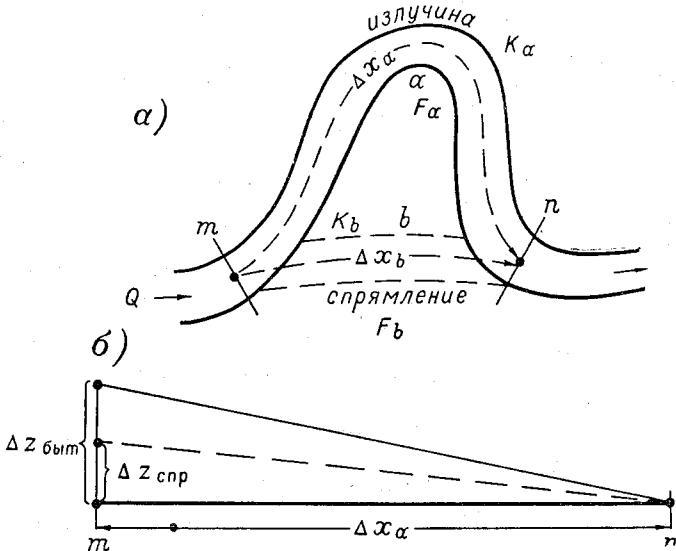


Рис. 9.11. Обозначения элементов потока при расчете спрямления русла.

Надо выяснить, как изменится падение после разработки спрямления при заданном расходе Q . Делим равенство (9.35) на (9.34):

$$\frac{\Delta z_{\text{спр}}}{\Delta z_{\text{быт}}} = \frac{F_{\text{общ}}}{F_a}. \quad (9.36)$$

Подставляя сюда вместо значений модуля сопротивления частные от деления Δx_a (основным считается рукав a) на квадрат соответствующего модуля расхода, получаем

$$\frac{\Delta z_{\text{спр}}}{\Delta z_{\text{быт}}} = \frac{K_a^2}{K_{\text{общ}}^2}.$$

Вспоминая, что

$$K_{\text{общ}}^2 = \left(K_a + K_b \sqrt{\frac{\Delta x_a}{\Delta x_b}} \right)^2,$$

где индекс a относится к излучине, а b к спрямляющему рукаву, записываем

$$\frac{\Delta z_{\text{спр}}}{\Delta z_{\text{быт}}} = \frac{K_a^2}{\left(K_a + K_b \sqrt{\frac{\Delta x_a}{\Delta x_b}}\right)^2}.$$

После преобразования будем иметь

$$\frac{\Delta z_{\text{спр}}}{\Delta z_{\text{быт}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{K_b}{K_a} \sqrt{\frac{\Delta x_a}{\Delta x_b}}\right)^2}. \quad (9.37)$$

Отсюда окончательно получаем

$$\Delta z_{\text{спр}} = \frac{\Delta z_{\text{быт}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{F_a}{F_b}}\right)^2}. \quad (9.38)$$

По этой формуле и может быть произведен расчет новой величины падения на спрямляемом участке реки.

§ 5. Расчет понижения уровня водной поверхности на перекате при дноуглублении

При проектировании дноуглубительных работ на перекатах учитывается снижение уровня воды на данном перекате и на вышерасположенных участках реки, которое будет вызвано увеличением пропускной способности русла, подвергнутого углублению. Задачу о снижении уровня на разрабатываемом перекате рассмотрел Н. А. Ржаницын, решение которого излагается ниже с некоторыми изменениями, позволяющими упростить получаемые расчетные соотношения.

За основную характеристику потока Ржаницын принимает продольный профиль водной поверхности в бытовом состоянии (до дноуглубления). Приблизительно он считает, что после разработки переката изменяются лишь глубина и уклон потока, а его ширина и коэффициент Шези остаются неизменными, т. е. $C \cong \text{const}$ и $B \cong \text{const}$. Рассмотрение задачи выполняется для некоторого межженного расхода $Q = \text{const}$.

Для бытового состояния можно написать

$$Q = H_0 B C \sqrt{H_0 \frac{\Delta z_0}{\Delta x}}$$

или

$$Q^2 = H_0^3 B^2 C^2 \frac{\Delta z_0}{\Delta x}. \quad (9.39)$$

Обозначения показаны на рис. 9.12.

При разработке прорези происходит понижение дна на величину ΔH и понижение уровня в начале перекатного участка на величину δz (рис. 9.12). В конце участка (в точке A) вполне допустимо считать уровень неизменным. После разработки судовой дноуглубительной прорези на перекате установится новая глубина $H_{\text{нов}}$, определяемая равенством

$$H_{\text{нов}} = H_0 + \Delta H - \frac{\delta z}{2}. \quad (9.40)$$

Новое значение уклона будет таким:

$$I_{\text{нов}} = \frac{\Delta z_0 - \delta z}{\Delta x}.$$

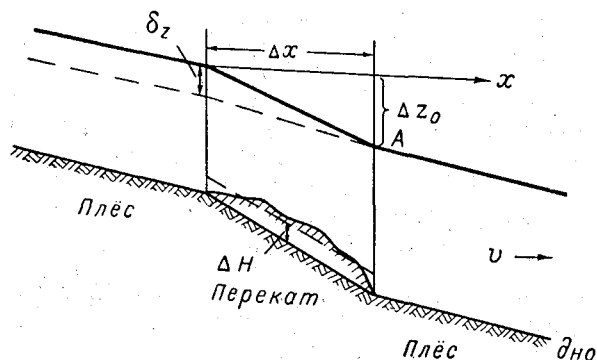


Рис. 9.12. Схема разрабатываемого переката.

Для измененных условий выражение квадрата расхода Q запишется следующим образом:

$$Q^2 = \left(H_0 + \Delta H - \frac{\delta z}{2} \right)^3 B^2 C^2 \frac{\Delta z_0 - \delta z}{\Delta x}. \quad (9.41)$$

Квадрат расхода можно выразить формулой (9.39). В соответствии с этим будем иметь:

$$H_0^3 B^2 C^2 \frac{\Delta z_0}{\Delta x} = \left(H_0 + \Delta H - \frac{\delta z}{2} \right)^3 B^2 C^2 \frac{\Delta z_0 - \delta z}{\Delta x}.$$

Деля все уравнение на его левую часть, приходим к следующему выражению:

$$\frac{\left(H_0 + \Delta H - \frac{\delta z}{2} \right)^3}{H_0^3} \frac{\Delta z_0 - \delta z}{\Delta z_0} = 1. \quad (9.42)$$

Это уравнение Ржаницына представляет в виде расчетных графиков (номограмм). Однако удобнее получить аналитическое решение. Извлечем из левой и правой частей уравнения (9.42) корень кубический:

$$\frac{H_0 + \Delta H - \frac{\delta z}{2}}{H_0} \sqrt[3]{1 - \frac{\delta z}{\Delta z_0}} = 1. \quad (9.43)$$

Разложим в биномиальный ряд второй сомножитель левой части уравнения, учитывая, что $\frac{\delta z}{\Delta z_0} < 1$

$$\left(1 - \frac{\delta z}{\Delta z_0}\right)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta z}{\Delta z_0} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} \left(\frac{\delta z}{\Delta z_0}\right)^2 - \dots \text{ и т. д.}$$

Третий член разложения, так же как и последующие члены, пренебрежимо мал по сравнению с первыми двумя членами; поэтому можно написать

$$\sqrt[3]{1 - \frac{\delta z}{\Delta z_0}} \cong 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta z}{\Delta z_0}.$$

Теперь вместо уравнения (9.43) имеем

$$\frac{H_0 + \Delta H - \frac{\delta z}{2}}{H_0} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta z}{\Delta z_0}\right) = 1. \quad (9.44)$$

После простых преобразований приходим к квадратному уравнению относительно искомой величины δz

$$\Delta H - \left(\frac{1}{2} + \frac{H_0 + \Delta H}{3 \Delta z_0}\right) \delta z - \frac{1}{6 \Delta z_0} \delta z^2 = 0.$$

Выполняем решение полученного уравнения. Учитывая, что в рассматриваемом случае перед радикалом может быть только знак минус, находим следующую расчетную формулу:

$$\delta z = \Delta z_0 \left[\frac{3}{2} + \frac{H_0 + \Delta H}{\Delta z_0} - 3 \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{H_0 + \Delta H}{3 \Delta z_0}\right)^2 - \frac{2 \Delta H}{3 \Delta z_0}} \right]. \quad (9.45)$$

§ 6. Расчет расходов воды и кривых водной поверхности для зимних условий (метод переходных коэффициентов)

Большие затруднения при вычислении расходов воды и построении кривых водной поверхности рек, покрытых льдом, возникают в связи с недостаточной ясностью вопроса о коэффициентах шероховатости льда, а также в связи с изменчивостью этих коэффициентов и необходимостью учета толщины льда.

Грубо ориентировочная таблица коэффициентов шероховатости льда разработана Г. К. Лоттером и П. Н. Белоконем

(табл. 9.1). Она показывает, что $n_{\text{л}}$ — коэффициент шероховатости льда зависит от многих условий, поэтому построение кривых водной поверхности для зимы носит крайне приближенный характер. В ответственных случаях надо делать расчеты в нескольких вариантах, принимая наиболее невыгодные из возможных значения $n_{\text{л}}$ и толщины льда.

Таблица 9.1

Коэффициенты шероховатости нижней поверхности ледяного покрова рек и каналов

Составлена П. Н. Белоконом и Г. К. Лоттером

№ п/п	Для реки в бытовых условиях		Для каналов	
	период ледостава	$n_{\text{л}}$	средняя скорость в момент ледообразования	$n_{\text{л}}$
1	Первые 10 дней ледостава (первая—вторая декада декабря) . . .	0,150—0,050 ¹	$v_{\text{ср}}=0,4—0,6 \text{ м/сек}$	0,015—0,018 (I) 0,010—0,012 (II)
2	10—20-й день ледостава (последняя декада декабря и начало января)	0,100—0,040 ¹	$v_{\text{ср}} > 0,6 \text{ м/сек}$	0,017—0,020 (I) 0,014—0,017 (II)
3	20—60-й день ледостава (средняя декада января—первая декада февраля)	0,050—0,030 ²		
4	60—80-й день ледостава (конец февраля, начало марта)	0,040—0,015 ²		
5	80—110-й день ледостава (март)	0,025—0,010 ²		

Примечание. Для рек в бытовых условиях верхние пределы указанных в таблице значений $n_{\text{л}}$ должны применяться в расчетах, касающихся участков, где природные условия позволяют ожидать образования торосистого льда или появления шуги, а нижние пределы — для участков, на которых возможно образование гладкого льда. В последней графе таблицы римской цифрой I отмечены случаи возможного появления в канале шуги, а цифрой II — когда такая возможность исключена.

¹ Для подпертых бьефов эти данные уменьшаются на 15%.

² Для подпертых бьефов эти данные уменьшаются на 35%.

Рассмотрим безнапорное движение, когда лед плавает на поверхности воды. В этом случае в пробитой лунке вода поднимается на величину, отвечающую удельному весу льда, т. е. примерно на 0,8—0,9 его толщины (рис. 9.13). Случаи, когда вода под небольшим напором выливается на поверхность льда, мы не будем специально рассматривать и будем считать допустимым

пренебрежение указанным небольшим напором, принимая движение за безнапорное. Случаи напорного движения подо льдом рассматривать не будем.

Гидравлические элементы потока, закрытого льдом, пометим индексом «зак» (закрытый), величины, характеризующие русло, — индексом «р», а величины, характеризующие лед, — индексом «л». Например, будем писать n_p — коэффициент шероховатости русла, n_l — коэффициент шероховатости льда (нижней его поверхности), $n_{зак}$ — обобщенный коэффициент шероховатости потока, закрытого льдом.

Русло условно можно рассматривать как составное (составленное из поверхностей различной шероховатости) с разграничением зон влияния на поток льда и собственно русла (рис. 9.13).

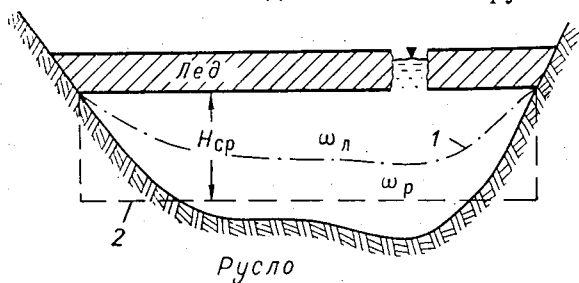


Рис. 9.13. Условное разделение поперечного сечения потока на зону влияния льда и зону влияния русла.

1 — линия раздела зон влияния, 2 — линия средней глубины H_{cp} .

Через ω_l и ω_p на рисунке обозначены соответственно площади поперечного сечения, находящиеся под влиянием льда и русла.

Запишем отдельно для верхней и нижней частей сечения потока уравнения движения, учитывая, что движение является равномерным или медленно изменяющимся, т. е. таким, когда можно пренебречь инерцией

$$\left. \begin{aligned} \gamma \omega_l I &= -\tau_l \chi_l; \\ \gamma \omega_p I &= -\tau_p \chi_p, \end{aligned} \right\} \quad (9.46)$$

где τ_l и τ_p — соответственно средние значения касательного напряжения на поверхности льда и русла (величины отрицательные), χ_l и χ_p — смоченные периметры поверхности льда и русла.

Суммируя эти выражения для всего потока, находим

$$\gamma (\omega_l + \omega_p) I = -\chi_p (\tau_p + a \tau_l); \quad (9.47)$$

здесь принято:

$$a = \frac{\chi_l}{\chi_p} \quad \text{или} \quad \chi_l = a \chi_p.$$

Значение смоченного периметра руслового потока, закрытого льдом $\chi_{\text{зак}}$, можно рассматривать как сумму $\chi_{\text{р}}$ и $\chi_{\text{л}}$, т. е.

$$\chi_{\text{зак}} = \chi_{\text{р}} + \chi_{\text{л}}, \quad \text{или} \quad \chi_{\text{зак}} = \chi_{\text{р}}(1 + a).$$

Общая площадь сечения потока складывается из площадей верхней и нижней части сечения $\omega_{\text{л}}$ и $\omega_{\text{р}}$, т. е.

$$\omega_{\text{зак}} = \omega_{\text{р}} + \omega_{\text{л}}.$$

Выражение (9.47) принимает вид

$$\gamma \omega_{\text{зак}} I = - \frac{\chi_{\text{зак}}}{1-a} (\tau_{\text{р}} + a \tau_{\text{л}}). \quad (9.48)$$

Гидравлический радиус для закрытого льдом потока определяется так:

$$R_{\text{зак}} = \frac{\omega_{\text{зак}}}{\chi_{\text{зак}}}. \quad (9.49)$$

Подчеркнем, что для закрытых льдом речных потоков недопустима замена гидравлического радиуса R средней глубиной; эти величины обычно отличаются более чем в два раза.

Деля уравнение (9.48) на $\gamma \chi_{\text{зак}}$ и вводя гидравлический радиус, получаем

$$R_{\text{зак}} = - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\tau_{\text{р}} + a \tau_{\text{л}}}{1+a}. \quad (9.50)$$

Выразим касательные напряжения $\tau_{\text{р}}$ и $\tau_{\text{л}}$ через квадраты средних скоростей и коэффициенты Шези соответственно областей влияния льда $C_{\text{л}}$ и русла $C_{\text{р}}$. Заменяя приближенно среднюю скорость каждой из этих областей средней скоростью всего поперечного сечения потока, пишем

$$\frac{\tau_{\text{р}}}{\gamma} = - \frac{v_{\text{ср}}^2}{C_{\text{р}}^2}; \quad \frac{\tau_{\text{л}}}{\gamma} = - \frac{v_{\text{ср}}^2}{C_{\text{л}}^2}. \quad (9.51)$$

Если принять приближенное равенство $\chi_{\text{л}} \cong \chi_{\text{р}}$, то можно написать $a=1$. Теперь уравнение (9.50) приводится к следующему виду:

$$R_{\text{зак}} I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{\text{р}}^2} + \frac{1}{C_{\text{л}}^2} \right) v_{\text{ср}}^2.$$

Выполняя преобразования и разрешая полученное равенство относительно $v_{\text{ср}}$, приходим к формуле

$$v_{\text{ср}} = C_{\text{зак}} \sqrt{R_{\text{зак}} I}, \quad (9.52)$$

где $C_{\text{зак}}$ — коэффициент Шези закрытого льдом руслового потока; при выводе формулы (9.52) найдено следующее выражение для этой величины:

$$C_{\text{зак}} = \frac{C_p C_l}{\sqrt{\frac{C_l^2 + C_p^2}{2}}}. \quad (9.53)$$

Подставим сюда значения C по формуле Маннинга, записанной соответственно для области влияния русла и для области влияния льда

$$C_p = \frac{1}{n_p} R_p^{1/6}; \quad C_l = \frac{1}{n_l} R_l^{1/6}.$$

Принимая приближенное равенство

$$R_p \cong R_l \cong R_{\text{зак}},$$

получаем следующую запись выражения (9.53):

$$C_{\text{зак}} = \frac{R_{\text{зак}}^{1/3}}{n_p n_l \sqrt{\frac{R_{\text{зак}}^{1/3}}{2} \left(\frac{1}{n_p^2} + \frac{1}{n_l^2} \right)}},$$

или иначе

$$C_{\text{зак}} = \frac{R_{\text{зак}}^{1/6}}{n_{\text{зак}}}. \quad (9.54)$$

Вместе с этим найдена формула для коэффициента шероховатости руслового потока, закрытого льдом; формула имеет вид

$$n_{\text{зак}} = \sqrt{\frac{n_l^2 + n_p^2}{2}}. \quad (9.55)$$

Найдем теперь переходный коэффициент k_n от n_p к $n_{\text{зак}}$. Это нетрудно сделать, вынося величину n_p из-под знака радикала в формуле (9.55)

$$n_{\text{зак}} = k_n n_p, \quad (9.56)$$

где

$$k_n = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{n_l}{n_p}\right)^2}{2}}. \quad (9.57)$$

Введем переходный коэффициент также и для гидравлического радиуса, т. е.

$$R_{\text{зак}} = k_R R, \quad (9.58)$$

при этом для широкой реки $k_R = \frac{1}{2}$, а $R = H_{\text{ср}}$. Глубина считается от нижней поверхности льда, что и соответствует заполненной водой части русла (рис. 9.13). Здесь и ниже сравнение закрытого льдом потока с открытым потоком производится для одинакового заполнения русла водой, т. е. считается, что уровень воды открытого потока, сравниваемого с рассматриваемым закрытым, соответствует уровню нижней поверхности льда, омываемой водой.

Подставим значения $R_{\text{зак}}$ и $n_{\text{зак}}$ в формулу (9.54)

$$C_{\text{зак}} = \frac{k_R^{1/6}}{k_n} \cdot \frac{R^{1/6}}{n_p}$$

Для открытого потока при той же глубине заполнения коэффициент Шези определяется равенством

$$C = \frac{R^{1/6}}{n_p},$$

поэтому можно написать

$$C_{\text{зак}} = k_C C, \quad (9.59)$$

где k_C — переходный множитель для коэффициента Шези, выражающийся формулой

$$k_C = \frac{k_R^{1/6}}{k_n}, \quad (9.60)$$

приводящейся к виду

$$k_C = \frac{1,26}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_p}\right)^2}}; \quad (9.61)$$

здесь при вычислении принято $k_R = \frac{1}{2}$.

Для модуля расхода также может быть введен переходный коэффициент k_K

$$K_{\text{зак}} = k_K K. \quad (9.62)$$

Нетрудно видеть, что при принятом условии $\omega_{\text{зак}} = \omega$ имеет место следующее соотношение:

$$k_K = k_R^{1/2} k_C, \quad (9.63)$$

или

$$k_K = \frac{0,89}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_p}\right)^2}}. \quad (9.64)$$

Для модуля сопротивления будем иметь

$$F_{\text{зак}} = k_F F, \quad (9.65)$$

где

$$k_F = \frac{1}{k_K^2}, \quad (9.66)$$

или

$$k_F = 1,26 \left[1 + \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{р}}} \right)^2 \right]. \quad (9.67)$$

Построение кривых водной поверхности рек для зимних условий выполняется при использовании переходного коэффициента k_F . Этот коэффициент позволяет произвести пересчет графиков модуля сопротивления, предварительно построенных для открытого русла и используемых для построения кривых свободной поверхности открытого потока. После пересчета указанных графиков на зимние условия производится построение кривых водной поверхности закрытого потока, причем используется метод Рахманова. Построение дает поверхность воды непосредственно совпадающую с нижней поверхностью льда и определяющую «наполнение русла», именно поэтому на конечном створе первого расчетного участка берется отметка нижней поверхности льда. Для получения поверхности уровня воды следует добавить к отметкам нижней поверхности льда, найденным по расчету, толщину погруженной в воду части льда.

§ 7. Некоторые гидрометрические вопросы

При переменном уклоне водной поверхности, обусловленном переменным подпором, расходы воды перестают быть однозначно связанными с уровнями, а оказываются одновременно зависящими и от уклона, т. е.

$$Q = \varphi(\zeta, I),$$

поэтому при измерениях расходов на гидрометрических постах в рассматриваемом случае оказывается необходимым одновременно измерять не только уровни, но и уклоны.

Уклоны измеряются на специальных уклонных постах, располагаемых выше и ниже основного гидрометрического створа, примерно на равных от него расстояниях. Общее расстояние между уклонными постами должно быть достаточным, чтобы обеспечить удовлетворительную точность определения падений Δz и исключить влияние местных возмущений (неровностей) свободной поверхности.

Построение кривых расходов может быть выполнено на основе следующей формулы:

$$Q = KI^{1/2}, \quad (9.68)$$

где K — модуль расхода, являющийся функцией уровня на гидрометрическом створе (если отсутствуют русловые деформации, нарушающие эту зависимость); I — уклон водной поверхности, измеренный во время измерения расхода воды.

Для случая выхода воды на пойму под модулем расхода K , содержащимся в формуле (9.68), следует понимать общий модуль расхода, который выше обозначался через $K_{\text{общ}}$.

Основной способ обобщения данных измерений расходов воды на гидростворах заключается в построении кривых расходов, т. е. графиков, изображающих зависимость Q от уровня ζ .

Уклон в общем случае не является функцией уровня ζ , поэтому целесообразно написать

$$\frac{Q}{\sqrt{I}} = K(\zeta). \quad (9.69)$$

При построении такой функции, имеющей целью обобщение данных измерений на гидрометрическом посту, нет необходимости в специальном вычислении модуля расхода. Производится вычисление отношений измеренных расходов к корню квадратному из измеренных уклонов и непосредственно строится график этих отношений в зависимости от уровня ζ . Чтобы получить затем с этого графика расход для каждого интересующего нас момента времени, надо знать уровень и уклон. Определив по уровню

частное $\frac{Q}{\sqrt{I}}$ и умножив полученную величину на корень квадратный из уклона, находим расход Q .

Для зимних условий при наличии достаточных данных измерений кривые расходов строятся обычным путем. В случае переменного подпора для графического обобщения данных измерений может быть использована схема, рассмотренная выше.

При отсутствии или недостаточности данных измерений для зимних условий может быть произведен приближенный пересчет летней кривой расхода на зимнюю путем умножения на переходный множитель k_Q . Нетрудно показать, что этот множитель равен множителю k_K , используемому для пересчета значений модуля расхода, отвечающих открытому руслу, к модулю закрытого льдом русла. Можно написать

$$k_Q = k_K = \frac{0,89}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{р}}}\right)^2}}. \quad (9.70)$$

В течение зимы коэффициенты шероховатости льда изменяются, поэтому при подобных построениях следует учитывать изменения значений k_Q . При пересчете кривой расхода используется зависимость

$$Q_{\text{зак}} = k_Q Q. \quad (9.71)$$

Такое соотношение между расходами отвечает одному и тому же уровню водной поверхности, который для зимних условий равен нижней поверхности льда. Схема построения зимней кривой расхода по летней показана на рис. 9.14.

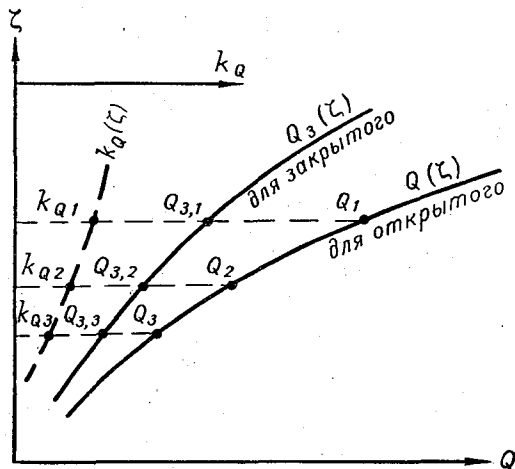


Рис. 9.14. Построение зимней кривой расхода по летней кривой методом переходных коэффициентов. (Уровни принимаются по отметкам нижней поверхности льда.)

Формула (9.71) может использоваться и при неравномерном режиме реки, покрытой льдом. В последнем случае производится пересчет летних графиков модуля расхода $K(\zeta)$.

Глава X

ПОПЕРЕЧНЫЕ ЦИРКУЛЯЦИИ И ПЛАН ТЕЧЕНИЯ РЕЧНОГО ПОТОКА

§ 1. Поперечные циркуляции и искусственное воздействие на структуру течений

Существует тесная взаимосвязь между структурой течений речных потоков и формированием их русла. Очень большую роль в русловых процессах играют поперечные течения,

развивающиеся в местах значительного искривления струй потока. Установившиеся поперечные течения всегда имеют характер замкнутых циркуляций. Искривления струй потока возникают на участках закруглений русла, в местах слияния потоков, при разветвлении потока на рукава, а также при резких изменениях формы и размеров поперечного сечения русла. В этих местах обычно и развиваются поперечные циркуляции.

Наблюдаемая на закруглениях потока асимметрия поперечного сечения русла, выражающаяся в наличии больших глубин у вогнутого берега и отмели у выпуклого берега, является следствием поперечных течений, осуществляющих поперечный пере-

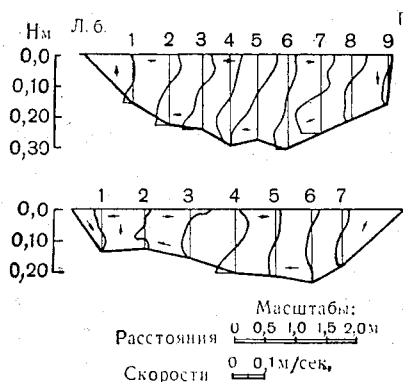


Рис. 10.1. Эпюры распределения по вертикали поперечных составляющих скоростей на профилях, расположенных на закруглении р. Юля-Йоки (правый берег вогнутый).

нос относительно крупных наносов в сторону выпуклого берега. Поверхностные струи, содержащие значительно меньше взвешенных наносов, чем придонные, переносятся к вогнутому берегу, что способствует размыву русла в этой части потока. На рис. 10.1 изображены эпюры поперечных течений на двух профилях, расположенных на закруглении небольшой реки. На рисунке ясно прослеживается циркуляционный характер поперечных течений: легко обнаруживаются зоны восходящих (у левого выпуклого берега) и нисходящих (у вогнутого берега) течений, связывающих донные и поверхностные поперечные течения в единое кольцо поперечной циркуляции. Восходящие и нисходящие течения показаны на рисунке стрелками. В больших реках поперечные циркуляции имеют аналогичный характер. Причиной возникновения поперечных течений на закруглении речного потока является развивающаяся здесь центробежная сила инерции и связанный с нею поперечный уклон водной поверхности.

Поперечные течения возникают также и на прямолинейных участках рек, но здесь интенсивность их гораздо меньше, чем на закруглении. Причиной их является повсеместно действующее на движущиеся на земной поверхности тела, в том числе и на потоки, так называемое кориолисово ускорение и обусловленная им кориолисова сила. Кориолисово ускорение появляется в движущемся теле вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Влияние циркуляционных течений, вызванных кориолисовым

ускорением, на процессы формирования русла оказывается менее интенсивным, чем течений, обусловленных центробежной силой на закруглениях потока. Поэтому при изучении интенсивных русловых деформаций течениями, обусловленными кориолисовым ускорением, обычно пренебрегают.

Руслоформирующее действие поперечных циркуляций широко используется в гидротехнической практике при проведении выправительных работ с целью улучшения судоходных условий, при проектировании и эксплуатации водозаборных, отстойных и других сооружений на реках. Разработано много систем струенаправляющих конструкций, позволяющих регулировать режим изменения глубин и перемещения наносов в потоке путем искусственно создаваемой поперечной циркуляции.

Разработка теории движения потока при искривлении струй является необходимой основой как при исследовании закономерностей формирования естественных русел, так и при решении ряда практически важных инженерных задач. Наиболее крупные исследования в этом направлении выполнены в основном отечественными учеными: Н. Е. Жуковским, В. М. Маккавеевым, М. В. Потаповым, А. К. Ананяном, И. Л. Розовским и др.

В работах Маккавеева проблема поперечных течений рассмотрена наиболее фундаментально. Им дано теоретическое решение таких вопросов, как распределение поперечных и продольных скоростей на закруглении русла, метод расчета поперечных течений, возникающих под действием кориолисовых сил, рассмотрен вопрос о возникновении и затухании поперечной циркуляции, о возбуждении циркуляции струенаправляющими конструкциями М. В. Потапова и А. И. Лосиевского. Исследовательские работы по созданию искусственной поперечной циркуляции и ее применению для решения различных задач русловой гидротехники ведутся в нашей стране с 30-х годов. Выполненные за это время лабораторные и теоретические исследования поперечной циркуляции завершились успешным проведением опытно-производственных испытаний различных видов конструкций, воспроизводящих поперечную циркуляцию в направлении, нужном для решения тех или иных конкретных задач.

Для борьбы с занесением донными наносами головных сооружений ирригационных каналов в Фергане, на р. Амударье, в Таджикистане успешно применялись направляющие системы из деревянных щитов на сваях с приспособлениями, позволяющими менять заглубление щитов и угол между щитами и течением, а также плавучие системы из деревянных понтонов сегментного очертания. Под действием направляющей системы, устанавливаемой у головы канала, поверхностный слой воды направлялся в канал, а насыщенный наносами придонный слой отклонялся и сносился вдоль системы в обход головы канала. Поступление донных наносов в каналы в результате действия систем резко

уменьшалось, а расход воды, поступающей в каналы из реки, заметно возрастал.

Для защиты берегов от размыва на р. Амударье и других реках применялись плавучие береговые направляющие системы из понтонов сегментного очертания, а также более простые сооружения в виде одиночных фашин, щитов из камыша, дерева и т. п.

В большинстве случаев применение этих конструкций давало положительный эффект, заключающийся в отклонении динамической оси потока от размываемого берега и отложении наносов около него. Однако недостаточно точный учет гидрологических условий приводил иногда к значительному снижению эффективности метода.

Опытные исследования по улучшению судоходных условий на перекатах проводились на реках Волге, Оке, Вятке и др. Хорошие результаты были достигнуты при использовании наносоуправляющих сооружений Лосиевского в виде донных направляющих щитов, сделанных из плетня на толстых кольях, прочно забитых в дно. Удовлетворительные результаты дали испытания Т-образных полузапруд И. А. Шадрина, представляющих собой комбинации плетневых поверхностных и донных направляющих.

Метод выправления русел с помощью поперечной циркуляции подлежит дальнейшему исследованию и усовершенствованию с целью повышения его эффективности и расширения круга задач, которые могут быть решены путем его использования.

§ 2. Поперечные течения и уклон на закруглении русла

Рассмотрим, следуя Маккавееву, схему возбуждения поперечных течений на закруглении русла в случае установившейся (т. е. пришедшей в соответствие с данной кривизной русла) поперечной циркуляции.

Обратимся к рис. 10.2, на котором схематически изображено поперечное сечение потока на изгибе русла, и рассмотрим силы, действующие на выделенный вертикальный столб жидкости с основанием, равным 1, и высотой H . Если пренебречь в первом приближении силами трения, то силами, действующими на выделенный объем, будут сила тяжести ρHg , направленная вертикально вниз, и центробежная сила инерции $\rho H a_z^*$, направленная вдоль горизонтальной оси z по нормали к направлению течения (ρ — плотность воды, a_z^* — средняя по вертикали величина центробежной силы инерции, приходящаяся на единицу массы выделенного объема жидкости. Эта масса равна $m = \rho \cdot H \cdot 1$). Под действием указанных сил свободная поверхность потока займет положение AB , нормальное направлению их равнодействующей. Как видим, возникновение на закруглении центробежной силы

инерции приводит к перекосу водной поверхности и образованию поперечного уклона потока.

Обозначим поперечный уклон водной поверхности через I_z . При малых значениях уклона можно приближенно принять, что

$$I_z = \operatorname{tg} \beta \cong \sin \beta,$$

где β — угол между горизонтальной осью z и свободной поверхностью потока AB .

Проекции силы тяжести и центробежной силы на свободную поверхность потока взаимно уравновешиваются, поэтому можем написать

$$\rho a_z^* \cos \beta = \rho g \sin \beta. \quad (10.1)$$

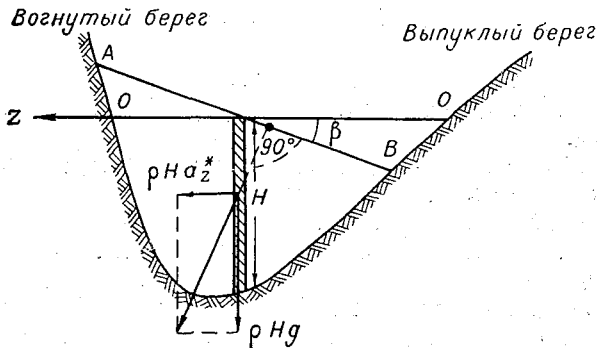


Рис. 10.2. Схема к выводу формулы поперечного уклона.

Подставляя сюда вместо $\sin \beta$ поперечный уклон и учитывая, что при малых углах $\cos \beta \cong 1$, можем записать

$$\rho a_z^* = \rho g I_z.$$

Отсюда получаем следующее приближенное выражение поперечного уклона:

$$I_z = \frac{a_z^*}{g}. \quad (10.2)$$

Средняя по вертикали величина центробежной силы инерции a_z^* , отнесенной к единице массы, пропорциональна среднему по вертикали значению квадрата продольной скорости $(v_x^2)_{\text{ср}}$ и обратно пропорциональна радиусу кривизны закругления потока r

$$a_z^* = \frac{(v_x^2)_{\text{ср}}}{r}. \quad (10.3)$$

Среднее значение квадрата скорости можно заменить квадратом средней скорости, вводя корректирующий множитель α_1 , т. е. написать

$$(v_x^2)_{\text{cp}} = \alpha_1 v_x^2_{\text{cp}},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^H v_x^2 dH}{H v_x^2_{\text{cp}}}.$$

Формула (10.2) приводится к виду

$$I_z = \frac{\alpha_1 v_x^2_{\text{cp}}}{gr}. \quad (10.4)$$

Ввиду близости величины α_1 (10.4) к единице в практических расчетах часто используют формулу (10.4), записанную без величины α_1 .

Уравновешивание составляющих силы тяжести и центробежной силы инерции может иметь место лишь в среднем по вертикали, в отдельных же точках живого сечения такого уравновешивания нет. Это связано с тем, что избыточное давление $\rho g I_z$, возникающее за счет поперечного уклона водной поверхности, является постоянным для каждой точки данной вертикали, а распределение по вертикали центробежной силы характеризуется убыванием последней от поверхности ко дну потока в соответствии с распределением квадрата продольной скорости по глубине.

В поверхностных слоях потока, где квадрат продольной скорости оказывается больше среднего по вертикали квадрата скорости, т. е. $v_x^2 > (v_x^2)_{\text{cp}}$, центробежная сила $\rho a_z^* = \rho \frac{v_x^2}{r}$ будет

преобладать над величиной $\rho g I_z$. В придонных слоях, наоборот, будет преобладать составляющая силы тяжести $\rho g I_z$, направленная к центру кривизны, поскольку здесь квадрат продольной скорости оказывается меньше величины $(v_x^2)_{\text{cp}}$. Такое распределение сил приводит к отклонению поверхностных струй в сторону вогнутого берега, а донных — к выпуклому. Наложение продольной скорости потока преобразует поперечную циркуляцию в винтообразное движение водных масс.

Рассмотренная схема возбуждения поперечных течений положена в основу выполненного Маккавеевым теоретического решения вопроса о распределении поперечной составляющей скорости по вертикали. При этом используются общие дифференциальные уравнения движения, записанные в так называемой прямоугольной системе натуральных координат.

Система натуральных координат весьма удобна при рассмотрении криволинейного движения, так как продольная ось в этой системе криволинейна и располагается вдоль линии тока осредненного течения, а две другие оси располагаются по нормали к ней. На рис. 10.3 представлена прямоугольная система натуральных координат, в которой продольная криволинейная ось x расположена на свободной поверхности потока (в общем случае свободная поверхность не является горизонтальной); поперечная ось z расположена в горизонтальной плоскости и направ-

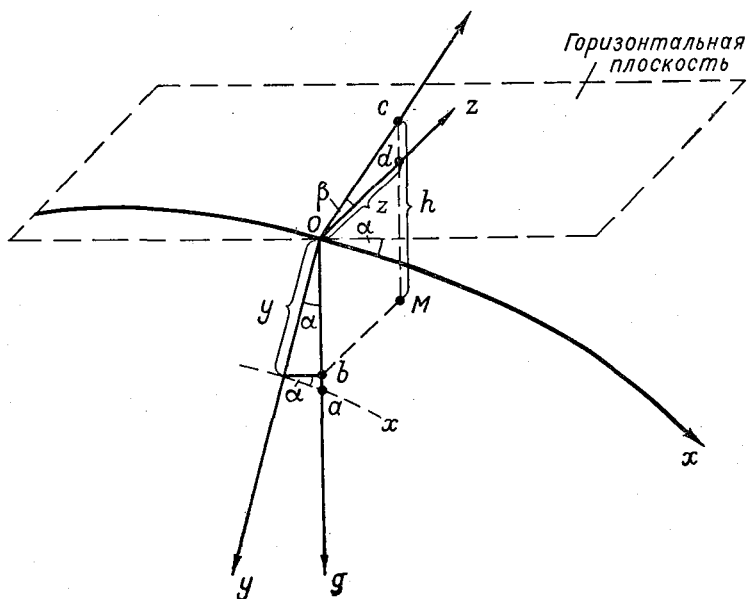


Рис. 10.3.

лена по нормали к оси x от центра кривизны к вогнутому берегу; ось y направлена вниз по нормали к оси x . Начало координат находится на уровне свободной поверхности потока.

Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось z прямоугольной системы прямолинейных координат записывается следующим образом (см. главу IV):

$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{\gamma} A_{\text{ср}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

Запишем теперь приближенное уравнение движения в проекции на ось z , используя натуральные координаты. При этом учтем, что проекция ускорения на ось z совпадает по величине с центростремительным ускорением и определяется приближенным

равенством $\frac{dv_z}{dt} \cong -\frac{v^2}{r}$, проекция ускорения силы тяжести на горизонтальную ось z равна нулю, т. е. $Z=0$, производная поперечной скорости по продольной координате $\frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$, поскольку рассматривается случай максимального развития поперечной циркуляции на участке наибольшей кривизны закругления русла.

Далее отбросим, как малые величины, вторые производные поперечной скорости по координатам x и z . Заменим в выражении центростремительного ускорения квадрат скорости квадратом ее продольной составляющей. Введя все перечисленные упрощения и считая, что величина радиуса закругления потока r постоянна по всей вертикали, получим для установившегося во времени течения

$$-\frac{v_x^2}{r} = -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{\gamma} A_{\text{ср}} \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}. \quad (10.5)$$

Приближенно примем распределение давления по вертикали по гидростатическому закону

$$p \cong p_{\text{ат}} + \gamma h, \quad (10.6)$$

где h — глубина погружения рассматриваемой точки.

Выражая глубину погружения точки h через координату y , учтем влияние как продольного, так и поперечного уклонов водной поверхности. Очевидно, что для точки M (рис. 10.3) в плоскости yOz с координатами y, z глубина погружения выразится равенством

$$h = \overline{Md} + \overline{dc},$$

причем

$$\overline{Md} = \overline{Ob} = y - \overline{ab},$$

$$\overline{ab} = x \sin \alpha \cong x I_x,$$

$$\overline{dc} = z \operatorname{tg} \beta = z I_z.$$

Здесь α — угол наклона продольной оси x к горизонту за счет продольного уклона водной поверхности, β — угол между горизонтальной поперечной осью z и свободной поверхностью, образующийся в результате поперечного перекоса свободной поверхности. Подставляя в выражение (10.6) значение h , полученное из приведенных равенств, находим

$$p \cong p_{\text{ат}} + \gamma (y - x I_x + z I_z). \quad (10.7)$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = I_z,$$

т. е. поперечный уклон отражает изменение давления вдоль оси z за счет перекоса свободной поверхности (изменение глубины или слоя воды вдоль оси z).

Подставляя значение $\frac{\partial p}{\partial z}$ в уравнение (10.5), получим

$$-\frac{v_x^2}{r} = -gI_z + \frac{g}{\gamma} A_{\text{сп}} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \quad (10.8)$$

Двукратное интегрирование этого уравнения по z позволяет получить выражение для поперечного уклона и распределения поперечной скорости по вертикали.

В качестве одного из вариантов решения Маккавеев принял при интегрировании следующие предположения: распределение продольной скорости по вертикали описывается параболой Базена

$$v = v_0 - m \sqrt{HI_x} \left(\frac{y}{H} \right)^2,$$

($m \approx 24$), коэффициент турбулентного обмена определяется по формуле

$$A_{\text{сп}} = \frac{\gamma H \sqrt{HI_x}}{2m}.$$

В качестве граничных условий при решении приняты следующие:
у поверхности

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,$$

у дна

$$v_{zH} + l \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_H = 0,$$

где индексами « H » помечены соответственно значения поперечной составляющей скорости и производной этой скорости у дна, т. е. на глубине $y=H$. Величина l есть некоторая линейная характеристическая величина, отражающая тормозящее влияние дна и определяемая следующей эмпирической формулой:

$$l = \left(\frac{C}{2m} - \frac{1}{3} \right) H.$$

Результирующий расход поперечного течения по всей вертикали с глубиной H , выражаемый приведенным ниже интегралом

при установившейся поперечной циркуляции, должен равняться нулю, т. е.

$$\int_0^H v_z(y) dy = 0.$$

Это очевидно, так как в рассматриваемом случае расходы поперечного течения в поверхностном и придонном слоях потока должны быть взаимно равными и иметь противоположное направление, т. е. различные алгебраические знаки.

Окончательное выражение для поперечного уклона I_z на закруглении и поперечной скорости v_z , полученные Маккавеевым, имеют вид

$$I_z = \frac{v_x^2 \text{cp}}{gr} f_1(C), \quad (10.9)$$

$$v_z = \frac{\kappa v_x \text{cp} H}{r} \varphi(C, \tilde{y}), \quad (10.10)$$

где $\tilde{y} = \frac{y}{H}$ и

$$f_1(C) = 1 + \frac{4m^2}{15C^2} - \frac{16m^3}{945C^3}, \quad (10.11)$$

$$\varphi(C, \tilde{y}) = a_1 [b_1(1 - 3\tilde{y}^2) - b_2(1 - 5\tilde{y}^4) + b_3(1 - 7\tilde{y}^6)], \quad (10.12)$$

причем

$$a_1 = \frac{2m^2}{9g}, \quad b_1 = 1 - \frac{7m}{30C} + \frac{8m^2}{315C^2},$$

$$b_2 = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{m}{3C}\right), \quad b_3 = \frac{3m}{70C}.$$

Значения функций $f_1(C)$ и $\varphi(C, \tilde{y})$ приводятся в табл. 10.1 и 10.2.

		Значения $f_1(C)$							Таблица 10.1
C	10	15	20	25	30	40	50	60	70
f_1	1,11	1,08	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,03

Коэффициент $\kappa = 1,3$ введен в формулу позже, после ее проверки на натурном материале.

В 1936 г. в результате теоретических и экспериментальных исследований Потапов получил следующую формулу для вычисления поперечной скорости:

$$v_z = \frac{v_x^2 \text{cp} H^2}{6 \frac{g}{\gamma} Ar} \alpha \frac{1 - 0,4\alpha}{\left(1 + \frac{1}{3}\alpha\right)^2} \left[(1 - \tilde{y}^2)^2 - 0,53 \right], \quad (10.13)$$

Значения $\varphi(C, \bar{y})$

\bar{y}	C							
	10	20	30	40	45	50	55	60
0	0,500	1,272	2,373	3,806	4,648	5,573	6,63	7,673
0,10	0,475	1,212	2,262	3,630	4,432	5,315	6,24	7,319
0,20	0,404	1,036	1,938	3,113	3,802	4,561	5,35	6,283
0,40	0,149	0,404	0,769	1,244	1,524	1,831	2,142	2,530
0,60	-0,171	-0,408	-0,745	-1,183	-1,438	-1,722	-2,021	-2,361
0,80	-0,413	-1,064	-1,994	-3,205	-3,915	-4,698	-5,55	-6,473
0,90	-0,452	-1,207	-2,285	-3,691	-4,452	-5,426	-6,415	-7,490
1,00	-0,408	-1,153	-2,217	-3,608	-4,424	-5,326	-6,300	-7,373

где

$$\alpha = \frac{v_{x0} - v_{xH}}{v_{x0}}$$

(линейные величины в этой формуле даны в сантиметрах). Проверка формулы по материалам лабораторных опытов в неболь-

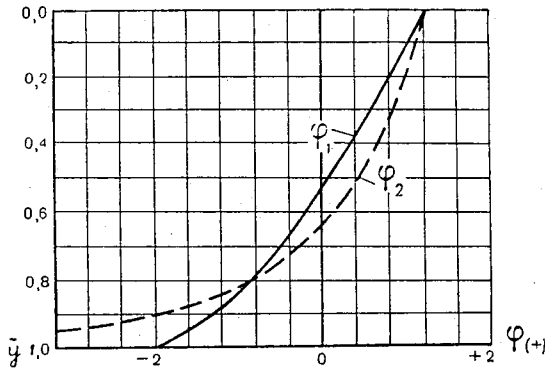


Рис. 10.4. Графики функций для вычислений по формуле И. Л. Розовского.

шом лотке показала хорошее совпадение с экспериментальными данными.

Обширные теоретические и экспериментальные исследования поперечных циркуляций в открытых потоках произвел И. Л. Розовский. В основу теоретического рассмотрения этого вопроса он положил приведенное выше уравнение Маккавеева (10.8). Для выражения распределения продольной скорости по вертикали Розовский применил логарифмическую зависимость. Для

поперечной составляющей скорости в потоках, имеющих $C < 50$, получена такая зависимость:

$$v_z = \frac{v_x \text{cp} H}{k^2 r} \left[\varphi_1(\tilde{y}) - \frac{\sqrt{g}}{kC} \varphi_2(\tilde{y}) \right], \quad (10.14)$$

в которой k — эмпирический параметр, равный в среднем 0,42. Функции $\varphi_1(\tilde{y})$ и $\varphi_2(\tilde{y})$ представлены графически на рис. 10.4.

§ 3. Поперечные течения, обусловленные вращением Земли

Выше уже указывалось, что в потоках поперечная циркуляция возникает под влиянием кориолисовой силы инерции, т. е. дополнительной силы, действующей при движении тела во вращающейся системе. Примером такой вращающейся системы является Земля. Перемещающееся по поверхности Земли тело участвует в двух основных видах движения: относительном (движение относительно Земли) и переносном (движение тела вместе с Землей относительно земной оси). Другие виды движения тела (движение вместе с Землей вокруг Солнца, движение со всей солнечной системой и т. д.) в рассматриваемом случае не имеют практического значения.

В различных точках земной поверхности скорость переносного движения, обусловленного суточным вращением Земли, неодинакова. Точки, расположенные на экваторе, обладают наибольшей скоростью переносного движения, равной $\frac{40\,000 \cdot 1000}{86\,400} = 467 \text{ м/сек}$ (40 000 км — примерная длина экватора, 86 400 — число секунд в сутках); точка, находящаяся на полюсе, не участвует во вращении Земли — ее переносная скорость равна нулю.

Следовательно, в Северном полушарии при движении потока с севера на юг переносные скорости частиц воды по мере их продвижения от истока к устью будут увеличиваться, т. е. частицы будут испытывать в своем переносном движении ускорение, направленное в сторону вращения Земли. Проявляющаяся при этом сила инерции, характеризующая инерционное противодействие частиц воды изменению скорости, будет направлена в обратную сторону — с востока на запад, т. е. в сторону правого берега. При движении потока с юга на север частицы воды будут испытывать отрицательное ускорение, направленное против вращения Земли (с востока на запад), так как их переносные скорости будут уменьшаться. Силы же инерции будут направлены в сторону вращения Земли (на восток), т. е. опять в сторону правого берега.

При движении потока в широтном направлении переносная скорость остается неизменной по величине, направление же скорости будет меняться. Возникающая вследствие этого сила инер-

ции оказывается направленной также в сторону правого берега. Вообще в Северном полушарии под действием отклоняющей силы вращения Земли на поток, движущийся в любом направлении, всегда действует сила инерции, направленная к правому берегу. В южном полушарии эта сила направлена к левому берегу.

Величина кориолисова ускорения $\omega_{\text{кор}}$ для потока со средней скоростью течения v выражается равенством

$$\omega_{\text{кор}} = -2v\omega \sin \varphi, \quad (10.15)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/сек}$ — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места.

Подстановка величины кориолисова ускорения в дифференциальное уравнение движения жидкости, в проекции на ось z , записанное с учетом принятых в § 2 ограничений, позволило Маккавееву записать следующее выражение:

$$-2\omega v_x \sin \varphi = -\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{\gamma} A_{\text{ср}} \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}. \quad (10.16)$$

Принимая распределение по вертикали продольной скорости по формуле Базена и используя записанную в предыдущем параграфе формулу для $A_{\text{ср}}$, учитывая те же граничные условия, что и при решении задачи о поперечных течениях на закруглении русла, получаем зависимости для I_z и v_z , которые могут быть представлены в следующем виде:

$$I_z = \frac{2\omega v_x \sin \varphi}{g} \left(1 + 0,089 \frac{m^2}{C^2} \right); \quad (10.17)$$

$$v_z = \frac{0,67 m^2 H \omega \sin \varphi}{g} \left[\left(1 - 0,267 \frac{m}{C} \right) \left(0,333 - \tilde{y}^2 \right) + 0,5 \tilde{y}^4 - 0,1 \right]. \quad (10.18)$$

Приближенно поперечный уклон, вызываемый отклоняющей силой вращения Земли, определяется равенством

$$I_z = \frac{2\omega v_x \sin \varphi}{g}. \quad (10.19)$$

Посмотрим, в каком соотношении могут находиться величины продольного уклона I_x и поперечных уклонов речных потоков I_{z3} и I_z вр. Земли, обусловленных соответственно центробежной силой на закруглении и кориолисовой силой.

Возьмем для примера реку, протекающую на широте $\varphi = 45^\circ$ и характеризующуюся на одном из ее участков средней глубиной $H_{\text{ср}} = 2,0 \text{ м}$, средней скоростью $v_{\text{ср}} = 1,0 \text{ м/сек}$, коэффициентом Шези $C = 30$ и радиусом кривизны закругления $r = 500 \text{ м}$.

Величины уклонов оказываются следующими (вычисления приближенные):

$$I_x = \frac{v^2}{C^2 H} = \frac{1,0}{30^2 \cdot 2} = 0,00055;$$

$$I_{z3} = \frac{v^2}{gr} = \frac{1}{9,8 \cdot 500} = 0,0002;$$

$$I_{z \text{ вр. Земли}} = \frac{2\omega v \sin \varphi}{g} = \frac{2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 0,7}{9,8} = 0,00001.$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{I_{z3}}{I_x} \cong 0,4; \quad \frac{I_{z \text{ вр. Земли}}}{I_x} \cong 0,02; \quad \frac{I_{z \text{ вр. Земли}}}{I_{z3}} = 0,05.$$

§ 4. План течений и его построение по данным натуральных измерений

Планом осредненных течений (или просто планом течений) называется план линий тока и урезов реки при определенном режиме последней (рис. 10.5). С изменением режима реки, изме-

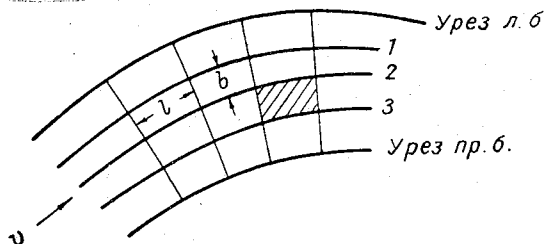


Рис. 10.5. Ортогональная решетка.

1, 2, 3 — линии тока.

нением ее уровня и расхода меняется очертание линий тока и урезов, т. е. меняется план течений. Расход между двумя соседними линиями тока от начала участка до конца предполагается неизменным. Объем потока, заключенный между соседними линиями тока, называется струей (или транзитной струей).

Если на плане течений построить перпендикулярно линиям тока криволинейные поперечники, то получим ортогональную решетку. Криволинейные прямоугольники, заключенные между смежными линиями тока и ортогональными поперечниками, называют клетками ортогональной решетки. На рис. 10.5 одна из клеток заштрихована. Длины клеток ортогональной решетки будем обозначать l , а ее ширины b (эти величины измеряются посередине клетки).

Поскольку транзитные струи заключают конечные объемы жидкости, более правильно говорить, что они ограничены не ли-

ниями, а поверхностями тока. Сверху транзитная струя ограничена свободной поверхностью, а снизу — дном. Поверхности тока являются цилиндрическими поверхностями с вертикальной образующей. Проекциями этих поверхностей на водной поверхности являются линии тока осредненного течения (предполагается осреднение направления и скорости течения по вертикали). Совокупность линий тока, изображенных на плане реки, и есть план течений.

При наличии материалов измерений расходов в нескольких близко расположенных друг к другу профилях можно построить натуральный план течений. Если расход на каком-либо участке реки

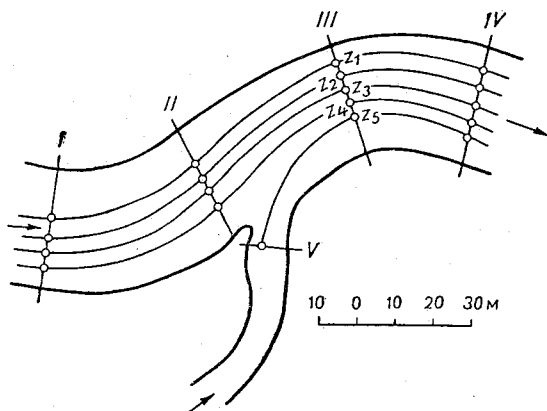


Рис. 10.6. Натурный план течения речного потока.

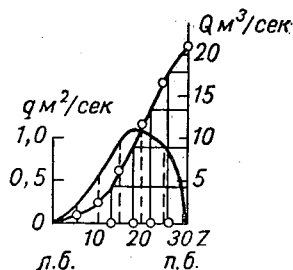


Рис. 10.7. Разделение интегральной кривой расхода на транзитные струи.

разделить на m струй, то на плане будет получено $m-1$ линий тока. Обычно принято делить расход реки на равные части. Таким образом, частные расходы всех струй будут равны. В случае впадения одного или нескольких притоков на рассматриваемом участке реки или изъятия части расхода (например, на орошение) удобно осуществлять деление наибольшего расхода, т. е. расхода на участке ниже впадения последнего притока или выше водозабора. При таком построении береговые струи полностью или их части будут отходить в водоотводы или, наоборот, будут присоединяться к струям главной реки, выходя из притоков (рис. 10.6).

При построении натурального плана течений используются эпюры элементарных расходов $q = vH = \varphi(z)$ (здесь z — поперечная координата, расположенная вдоль створа, v — средняя скорость на вертикали, H — глубина вертикали) (рис. 10.7). По этим

эпюрам для каждого профиля строится интегральный график расхода, показывающий приращение расхода при движении от одного берега к другому. Ордината интегрального графика расхода у одного берега равна нулю, а у другого — полному расходу Q . Интегральные графики позволяют осуществить разбивку полного расхода на любое количество струй с расходами δQ и установить на профиле границы между этими струями. Итак, интегрирование графика $q(z)$ в пределах от $z=0$ до $z=B$ (B — ширина реки) дает полный расход Q в створе, т. е.

$$Q = \int_0^B q(z) dz.$$

Если требуется представить течения в виде m струй, то Q делится на m частей и на каждом поперечнике потока (на котором измерен расход) отыскиваются границы между струями, т. е. некоторые точки z_1, z_2, \dots, z_{m-1} . Точки $z=0$ и $z=B$ — урезы противоположных берегов. Положение линий тока переносится со всех поперечников на план реки, далее производится вычерчивание линий тока на плане участка (см. рис. 10.6). На этом заканчивается построение плана течений по натурным данным.

§ 5. Теоретический метод построения плана течений

Советский ученый Н. М. Бернадский разработал теоретический метод построения плана течений, в основе которого лежат динамические уравнения, составленные для транзитной струи (уравнения равновесия) и условия, учитывающие взаимодействие между струями.

Бернадский рассмотрел случай неравномерного установившегося течения транзитной струи речного потока. Неравномерность течения связана с изменениями глубины потока h вдоль струи и ширины струи b . Этими изменениями обусловлены изменения площади поперечного сечения струи $\delta\omega$. Принимается, что в общем случае струя искривлена в плане. В решении учитываются следующие силы: активная сила — сила тяжести, сила сопротивления, сила инерции, связанная с изменением скорости вдоль струи, центробежная сила, связанная с наличием кривизны струи в плане.

Действие на поток этих сил учитывается следующими динамическими уравнениями, которые нам уже хорошо знакомы: уравнение продольного динамического равновесия (уравнение неравномерного движения)

$$I_x = \frac{v^2}{C^2 h} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right); \quad (10.20)$$

уравнение поперечного динамического равновесия

$$I_z = \frac{v^2}{gr}; \quad (10.21)$$

где v — средняя скорость в поперечном сечении транзитной струи, h — средняя глубина струи в пределах клетки ортогональной решетки, C — среднее значение коэффициента Шези на участке струи, r — радиус кривизны струи, I_x и I_z — соответственно продольный и поперечный уклоны свободной поверхности.

Динамических уравнений недостаточно для решения поставленной задачи.

К этим уравнениям добавляются еще следующие два уравнения: уравнение неразрывности, которое для случая установившегося движения записывается в виде

$$\delta Q = v\delta\omega = vbh = \text{const} \quad (10.22)$$

(где δQ — расход струи), уравнение падений элемента водной поверхности, охватывающее две соседние струи и взаимно связывающее их. Одну из этих струй считают за начальную и элемент примыкающей к ней расчетной струи связывают с элементами начальной струи. Указанное уравнение падений имеет вид

$$\delta + \iota_0 + \delta_0 - \iota = 0. \quad (10.23)$$

Фигурирующие здесь падения по длине струи (δ) и по поперечникам (ι) определяются равенствами (рис. 10.8)

$$\left. \begin{aligned} \delta &= I_x l; & \delta_0 &= I_x \iota_0; \\ \iota &= I_z b', & \iota_0 &= I_z \iota_0 b'_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Индексами «0» помечены величины, относящиеся к начальной струе и к начальному поперечнику; b'_0 и b' — расстояния между серединами начальной и расчетной струй на начальном и последующем ортогональных поперечниках (рис. 10.8).

Решая совместно приведенные выше четыре уравнения (10.20) — (10.23), Бернадский получает основное расчетное уравнение для построения плана течений. Это уравнение называется правилом рисунка и имеет вид

$$K = K_0 \tilde{h}^{1,67} \frac{\eta}{n}, \quad (10.25)$$

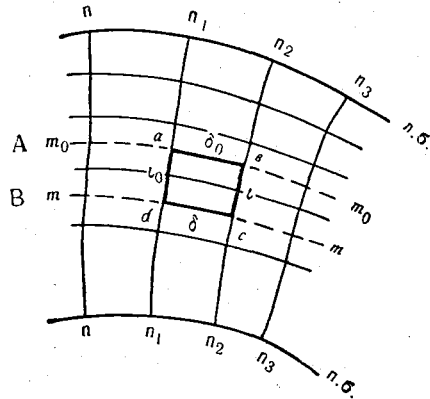


Рис. 10.8. Падения ι , δ , ι_0 и δ_0 по струям и поперечникам плана течений.

где

$$\eta = \sqrt{\frac{l}{l_0} \left(1 + \frac{l-l_0}{\delta_0}\right) \frac{1-\beta_0}{1-\beta}}. \quad (10.26)$$

Величины β_0 и β учитывают изменение ширины и глубины соответственно начальной и расчетной струй вдоль продольной оси x .

Поясним другие величины, содержащиеся в правиле рисунка. Относительная глубина \tilde{h} и относительная шероховатость \tilde{n} расчетной струи определяются равенствами

$$\tilde{h} = \frac{h}{h_0}; \quad \tilde{n} = \frac{n}{n_0},$$

где индекс «0» относится к начальной струе.

Величина K выражает отношение длины клетки ортогональной решетки к ее ширине, т. е.

$$K = \frac{l}{b}. \quad (10.27)$$

Для начальной струи

$$K_0 = \frac{l_0}{b_0}.$$

Построение плана течений ведется методом последовательных приближений. Бернадский полагает, что первое приближенное построение может быть выполнено при принятии $\eta=1$. В связи с этим приближенное правило рисунка записывается в виде

$$K = K_0 \tilde{h}^{1.67} \frac{1}{\tilde{n}}. \quad (10.28)$$

Заметим, что построение даже при использовании упрощенной зависимости (10.28) отличается известной сложностью.

Рассмотрим приближенный вывод правила рисунка, позволяющий прийти к упрощенной формуле (10.28). Отбросим в уравнении продольного динамического равновесия член, учитывающий инерцию, и напишем выражения падений для расчетной и начальной струй

$$\left. \begin{aligned} \delta &\cong \frac{v^2}{C^2 h} l; \\ \delta_0 &\cong \frac{v_0^2}{C_0^2 h_0} l_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.29)$$

Выразим скорость через расход δQ

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\delta Q}{bh}; \\ v_0 &= \frac{\delta Q}{b_0 h_0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Учитывая формулу Маннинга

$$C = \frac{h^{1/6}}{n},$$

подставляя равенство (10.30) в (10.29), находим

$$\left. \begin{aligned} (\delta Q)^2 &= \frac{\delta h^{10/3} b^2}{n^2 l}; \\ (\delta Q)^2 &= \frac{\delta_0^{10/3} b_0^2}{n_0^2 l_0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

Вводим сюда величину K и приравниваем правые части равенств (10.31)

$$\frac{n^2 K^2}{\delta h^{10/3} l} = \frac{n_0^2 K_0^2}{\delta_0 h_0^{10/3} l_0}.$$

Разрешая это уравнение относительно K , преобразуя и вводя безразмерные величины \tilde{h} и \tilde{n} , получаем следующую расчетную формулу:

$$K = K_0 \tilde{h}^{1,67} \frac{\eta_*}{\tilde{n}}, \quad (10.32)$$

в которой

$$\eta_* = \frac{\delta l}{\delta_0 l_0}.$$

При построении первого приближения принимается $\eta_* = 1$.

Если нет данных о распределении коэффициентов шероховатости на участке реки, то при построении плана течений принимают $\tilde{n} = 1$ и вместо формулы (10.28) пользуются такой расчетной зависимостью:

$$K = K_0 \tilde{h}^{1,67}. \quad (10.33)$$

По формуле (10.33) или (10.28) строится первое приближение плана течений, а затем построение уточняется непосредственно по уравнениям продольного (10.20) и поперечного (10.21) динамического равновесия при использовании уравнения падений (10.23) как основной контрольной зависимости. Решение считается законченным, когда для всех расчетных клеток вычисленные падения δ , δ_0 , l и l_0 удовлетворяют этой зависимости.

В ряде случаев при относительно несложных формах русла реки расчет по формулам (10.33) или (10.28) дает решение, весьма близкое к окончательному, и поэтому принимается за окончательное. При приближенном построении плана течений всегда используются формулы (10.33) и (10.28).

Основными исходными данными для построения плана течений являются: план участка реки в изобатах, значения расходов воды при определенных уровнях, желательно, кроме того, иметь значения уклона водной поверхности или величины падения на участке при разных уровнях. Последние используются для контроля построения плана течений. Из предыдущего изложения должно быть ясно, что при расчете течений одновременно могут быть получены и отметки свободной поверхности потока.

Если на рассматриваемом участке возможен подпор или спад, то построение плана течений необходимо вести снизу вверх по течению, привязывая отметки вышерасположенного поперечника

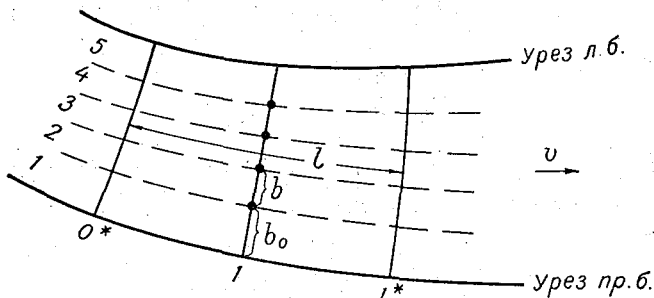


Рис. 10.9. Схема к расчету плана течений.

0^* — начальный ортогональный поперечник, 1 — расчетный поперечник, 1^* — конечный ортогональный поперечник, $1-5$ номера струй.

к отметкам нижележащего поперечника. При этом соответствующим образом изменяются алгебраические знаки дифференциалов или разностей, содержащихся в приведенных выше формулах.

Если течение на участке реки равномерное, то построение удобнее вести сверху вниз по течению, т. е. в направлении положительных значений оси x . При приближенных построениях, основанных на применении только формулы (10.33) или (10.28), построение ведется сверху вниз.

В начале участка реки назначают ортогональный поперечник, который располагают нормально урезам. От этого поперечника ориентировочно проводится необходимое число линий тока и на некотором расстоянии от первого ортогонального поперечника вычерчивается второй ортогональный поперечник. Он располагается перпендикулярно урезам и линиям тока (рис. 10.9). Ортогональные поперечники обычно получают криволинейными. Между двумя ортогональными поперечниками (примерно на равном расстоянии от них) вычерчивается прямой расчетный поперечник, который должен быть в среднем перпендикулярным потоку.

С расчетного поперечника по изобатам снимается поперечный профиль русла и на него наносятся предварительно принятые линии тока, являющиеся границами между струями. Находятся средние глубины \tilde{h} и ширины b струй. Одна из струй принимается за начальную и относительно ее ведется расчет по формуле правила рисунка. Производя вычисления, заполняем таблицу.

Таблица 10.3

К построению плана течений по методу Бернадского. Пример расчета для одного поперечника (начальная струя пятая, $K_0=3$)

Гидравлические элементы	Струи					Примечание
	1	2	3	4	5°	

Вариант I

\tilde{h} м	1	2,5	3,0	3,0	1,5	Совпадения не получено, надо повторить расчет
\tilde{h}	0,67	1,7	2,0	2,0	1,0	
$\tilde{h}^{1,67}$	0,50	2,40	3,15	3,15	1,00	
K	1,50	7,20	9,45	9,45	3,0	
b м	20	8	8	8	12	
l м	30	58	76	76	36	

Вариант II

\tilde{h} м	1,1	2,6	3,0	3,0	1,5	Достаточное совпадение
\tilde{h}	0,74	1,7	2,0	2,0	1,0	
$\tilde{h}^{1,67}$	0,60	2,40	3,15	3,15	1,00	
K	1,80	7,20	9,45	9,45	3,00	
b м	22	7	7	7	13	
l м	40	50	66	66	39	

В табл. 10.3 приведен пример расчета для одного поперечника. В таблице показано деление потока на пять транзитных струй. Первоначально деление произведено произвольно. В первую строку таблицы вписаны значения глубин каждой струи, а в предпоследнюю — значения ширины струй b . Далее расчет выполнен по формуле

$$K = K_0 \tilde{h}^{1,67}$$

и затем l найдено из соотношения

$$l = Kb.$$

Для возведения в степень 1,67 удобно предварительно построить расчетный график.

Полученные в результате расчета значения l наносятся на план и выясняется, соответствуют ли полученные значения l

намеченным на плане длинам клеток ортогональной решетки между рассматриваемыми ортогональными поперечниками. Первый вариант не дает совпадения, поэтому расчет повторяется при измененном расположении линий тока. Измененное положение линий тока учитывается величинами b (табл. 10.3, вариант II).

В результате расчета варианта II получается удовлетворительный результат, так как через концы отрезков l_1 , l_2 и т. д. может быть проведен следующий ортогональный поперечник. Легко убедиться, что небольшие отклонения не отражаются на результате расчета. Этот расчет считается окончательным для данного профиля, и на план наносятся значения ширины струй b (из предпоследней строки по варианту II).

Таким же образом расчет выполняется и для последующих поперечников. В результате получаем ортогональную решетку (т. е. план течений) для всего участка реки. Необходимо заметить, что при расчете для последующих поперечников могут получиться столь значительные смещения линий тока, что ранее построенные поперечники перестанут быть ортогональными к линиям тока. Ортогональность является основным критерием при построении плана течений, и условия ортогональности обязательно должны выполняться. Поэтому в указанном случае необходимо произвести повторный расчет для вышерасположенных поперечников.

§ 6. Расчет течений методом интегральных кривых и построение донных и поверхностных струй

Рассматриваемый здесь вариант метода построения плана течения, предложенный автором настоящей книги, отличается от рассмотренного выше метода тем, что расчет и подбор решения выполняется не по отдельным профилям, а одновременно для всего рассматриваемого участка реки. Основным критерием правильности построения, как и выше, является ортогональность линий тока и поперечников.

Построение начинается с того, что на плане участка реки ориентировочно (без всякого расчета) вычерчивается ортогональная решетка (линии тока и поперечники). Между ортогональными криволинейными поперечниками проводятся расчетные поперечники, которые по мере возможности делают прямыми. На рис. 10.10 ортогональные поперечники помечены цифрами со звездочками 0^* , 1^* , 2^* и 3^* , а расчетные показаны цифрами 1, 2, 3.

В качестве исходной предпосылки принимаем постоянство продольного падения δ вдоль каждого пояса, заключенного между двумя ортогональными поперечниками. В соответствии с этим продольный уклон I для участка струи, заключенного

между двумя такими поперечниками, оказывается обратно пропорциональным длине клетки l и находится по формуле

$$I_i = \frac{\delta}{l_i}, \quad (10.34)$$

где i — номер струи.

По формуле Шези имеем $v_i = C_i \sqrt{H_i \frac{\delta}{l_i}}$.

Для элементарного расхода эта формула дает

$$q_i = \frac{H_i^{1,67} \delta^{0,5}}{n_i l_i^{0,5}}. \quad (10.35)$$

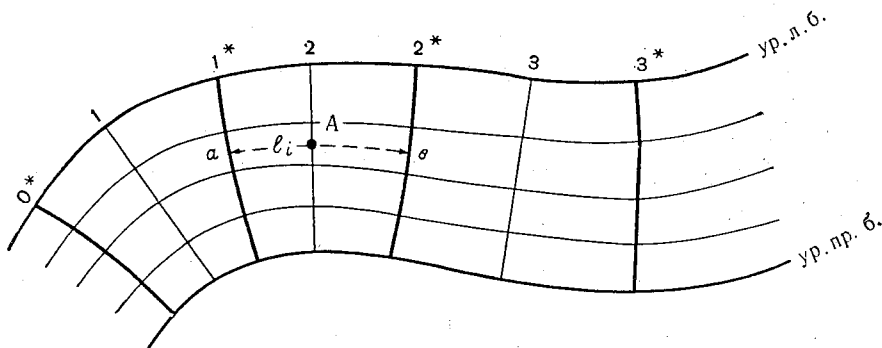


Рис. 10.10. Обозначения ортогональных и расчетных поперечников при построении плана течений.

Вводим некоторую функцию

$$f_i = \frac{H_i^{1,67}}{n_i l_i^{0,5}}. \quad (10.36)$$

Так как по ширине реки падение δ считается постоянным для каждого пояса, заключенного между двумя ортогональными поперечниками, то величины q_i и f_i являются взаимно пропорциональными, т. е.

$$q_i \sim f_i. \quad (10.37)$$

Для всех расчетных поперечников участка строятся графики величины f как функции поперечной координаты z . По этим графикам строят интегральные кривые путем суммирования элементарных площадей ΔB , вычисляемых по формуле

$$\Delta B_j = \Delta B_j f_{cp j}, \quad (10.38)$$

где ΔB_j — элемент ширины реки на профиле (полная ширина реки на профиле обозначается через B); $f_{cp j}$ — средняя высота

ординаты в пределах рассматриваемого элемента абсциссы; j — порядковый номер элемента.

Обозначим ординату интегральной кривой через β , тогда

$$\beta_j = \sum^j \Delta\beta_j. \quad (10.39)$$

Суммирование производится последовательно от элемента к элементу, поэтому целесообразно написать

$$\beta_j = \beta_{j-1} + (f_{cp} \Delta B)_j. \quad (10.40)$$

По результатам подсчета сумм строим интегральные графики, $\beta(z)$ для всех расчетных профилей.

Для каждого профиля будет иметь место пропорциональность

$$Q = a\beta_{max}, \quad (10.41)$$

где a — коэффициент пропорциональности, β_{max} — максимальная ордината интегральной кривой. При $z=0$ $\beta=0$, при $z=B$ $\beta = \beta_{max}$. Такая же пропорциональность существует и между частями ординаты β_{max} и частями полного расхода. Поэтому если разделить β_{max} на k равных частей, то и Q будет разделен в поперечном профиле реки тоже на k равных частей. Можно написать

$$\delta Q = \frac{1}{k} \beta_{max}. \quad (10.42)$$

Разделив β_{max} на k частей и снеся точки деления на график $\beta(z)$, а с графика на абсциссу z , получаем на ней точки деления расхода на k равных частей, т. е. на k струй. Именно через эти точки и проводятся параллельно урезам линии тока; перпендикулярно к ним проводим ортогональные поперечники, стараясь располагать их примерно там, где они были на произвольно вычерченном плане, но меняя необходимым образом их направление. Путем таких построений получаем уточненную ортогональную решетку. После этого расчет повторяется тем же способом, с использованием длин клеток l , полученных по новой решетке. Если после второго расчета линии тока и ортогонали не смещаются, расчет считается законченным. При необходимости расчет следует еще раз повторить. Построенный таким образом план течений может быть уточнен при использовании уравнений продольного и поперечного равновесия, согласно рекомендациям, данным в предыдущем параграфе.

Теперь рассмотрим задачу о построении донных и поверхностных струй. Это построение выполняется на основе полученного заранее тем или иным способом плана осредненных течений.

Траектории поверхностных и донных струй находятся путем учета как продольного Δx , так и поперечного Δz перемещения точек. Поперечное перемещение осуществляется за счет попереч-

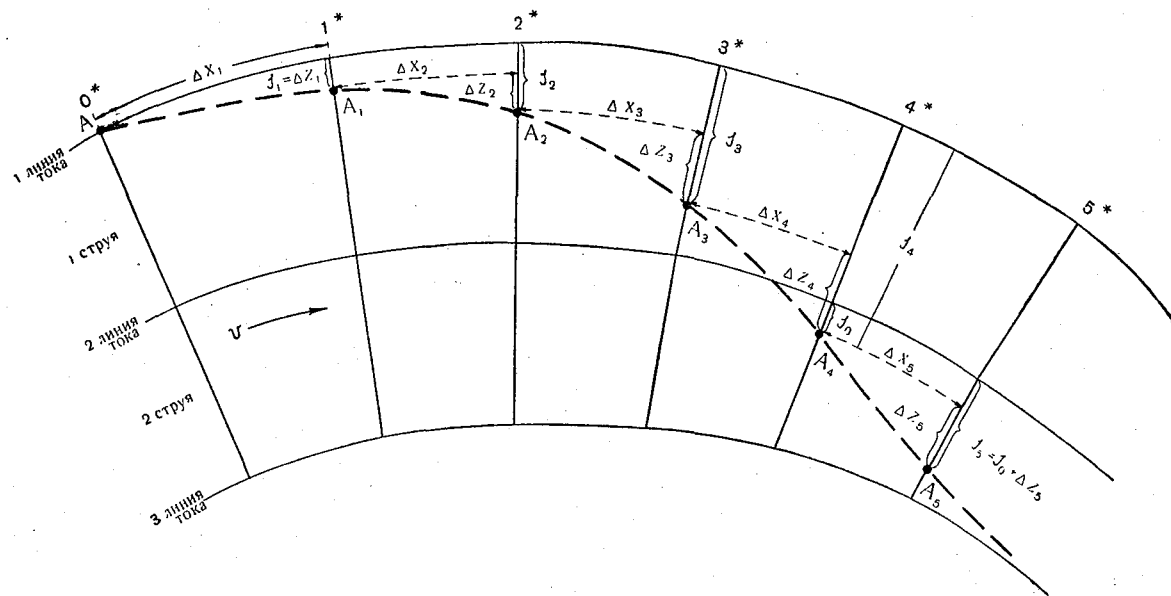


Рис. 10.11. Пример построения траекторий донных течений.

ной составляющей скорости, продольное — за счет продольной. Если v_x и v_z — соответственно продольная и поперечная составляющие скорости, то продольная и поперечная компоненты перемещения Δx и Δz за время Δt определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= v_x \Delta t; \\ \Delta z &= v_z \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (10.43)$$

При построении можно задаться определенными значениями Δx , тогда интервал времени Δt находится из соотношения

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x}.$$

Получаем весьма простую расчетную зависимость для нахождения Δz

$$\Delta z = \frac{v_z}{v_x} \Delta x. \quad (10.44)$$

Поперечная скорость для поверхности и для дна вычисляется по формуле Маккавеева, в которой для поверхностной скорости принимается $\tilde{y}=0$, а при вычислении донной поперечной скорости $\tilde{y}=1$.

При построении траекторий донных и поверхностных струй значения Δx откладываются вдоль линий тока осредненного течения, а значения Δz в перпендикулярном к ним направлении, т. е. вдоль ортогональных поперечников. На рис. 10.11 дан пример построения траекторий донных течений. Таким же образом может быть построен и план траекторий поверхностных течений.

Глава XI

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В КАНАЛАХ И РЕКАХ

§ 1. Определения. Основные уравнения

Неустановившееся, т. е. изменяющееся во времени, движение в открытых руслах проявляется различным образом. Для незарегулированных рек основным видом неустановившегося движения являются паводки, рассмотренные в общих чертах в главе I настоящей книги. Для зарегулированных рек характерны волны попусков, обусловленные суточной и недельной неравномерностью выработки энергии и другими причинами. Формы неустановившегося движения многообразны, но наиболее характерным для рек видом неустановившегося движения является волна

перемещения. Такое наименование обусловлено тем, что при продвижении волн перемещения в направлении движения могут перенестись значительные объемы воды и всегда происходит изменение (увеличение или уменьшение) расходов потока по сравнению с первоначально имевшими место расходами. Именно это происходит при движении волны паводка (или пуска).

Мгновенный профиль волны перемещения характеризуется сильной растянутостью вдоль потока и стало быть имеет малую кривизну. Элементы потока — расход воды, скорость течения, глубина, уклон — при прохождении такой волны изменяются медленно. Поэтому неустановившееся движение, обусловленное волной перемещения, иначе называют **медленно изменяющимся неустановившимся движением.**

В настоящей главе рассматривается именно такой вид неустановившегося движения. Посмотрим, какие формы может приобретать волна перемещения.

Если при перемещении волны происходит повышение уровня, то волна называется **положительной**, если происходит понижение уровня, волна называется **отрицательной**. Волна (положительная или отрицательная), перемещающаяся вниз по течению, называется **прямой волной**, а перемещающаяся вверх по реке (против течения) — **обратной волной**. Прямую положительную волну, переносящую увеличение расхода воды вниз по течению, обычно называют **волной наполнения**. Обратную положительную волну, возникающую, например, в верхнем бьефе при полном или частичном закрытии сбросных щитов плотины или остановке турбин, называют **волной подпора**. Волна подпора переносит уменьшение расхода вверх по реке. Прямую отрицательную волну называют **волной отлива**; ее возникновение может быть обусловлено, например, уменьшением расходов в верхнем течении реки (в период спада паводка), а в нижнем бьефе уменьшением пропуска воды через сооружения. Обратную отрицательную волну называют **волной излива**; она возникает в верхнем бьефе плотины при увеличении пропуска расходов через сооружения, распространяется вверх по реке и несет с собой увеличение расходов.

Передний край перемещающейся (вверх или вниз) волны называют **фронтом волны**, а основную ее часть — **телом волны**. Положительные волны обычно имеют относительно крутой фронт, а отрицательные — пологий. При прохождении фронта волны изменение гидравлических элементов потока происходит относительно быстро, а в пределах тела медленно. Скорость распространения волны, в частности ее фронта, называется **волновой скоростью**. Надо иметь в виду, что не всякая волна в речном потоке распространяется с волновой скоростью.

Так, скорость перемещения волн половодья на крупных реках обусловлена не только гидравлическими параметрами

формирующейся волны наполнения, но и условиями ее существования и трансформации при прохождении по руслу и поймам, где аккумулируется часть воды, особенно из фронтальной части паводка, что приводит к уменьшению скорости перемещения действительного фронта. С другой стороны, происходит подпитывание волны боковыми притоками, пополняющими объем волны на протяжении всего или части ее тела.

При теоретическом исследовании неустановившегося движения в качестве основных уравнений используются динамическое уравнение движения и уравнение неразрывности, причем потери на трение учитываются той же зависимостью, что и при равномерном движении. Динамическое уравнение имеет вид

$$I = \frac{\alpha_0}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{\partial (v^2)}{\partial x} + \frac{v^2}{C^2 R}, \quad (11.1)$$

где I — уклон свободной поверхности, v — средняя по сечению потока скорость, t — время, C — коэффициент Шези, R — гидравлический радиус потока, α_0 и α — коррективы, учитывающие распределение скоростей в поперечном сечении потока.

Это уравнение отличается от уравнения равномерного движения потока тем, что оно содержит величину $\frac{\alpha_0}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, учитывающую изменение скорости течения во времени, т. е. инерцию водных масс, обусловленную именно неустановившимся характером движения. В решениях иногда принимают $\alpha_0 \cong \alpha$, но чаще берут $\alpha_0 = 1$. Ниже мы поступаем именно таким образом.

Уклон I можно выразить через уклон дна i и частную производную глубины по продольной оси потока x

$$I = i - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (11.2)$$

Введем в уравнение (11.1) расход Q , модуль расхода

$$K = C\omega \sqrt{R}$$

и учтем выражение (11.2), тогда получим следующую запись уравнения неустановившегося движения:

$$i - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{\partial (v^2)}{\partial x} + \frac{Q^2}{K^2}. \quad (11.3)$$

При решении задач о неустановившемся движении используется уравнение неразрывности, составленное для всего потока (см. главу I). Оно имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (11.4)$$

Производная, содержащаяся в правой части уравнения, учитывает изменение уровня ζ во времени. Приращение уровня, умноженное на ширину потока B , равно приращению площади поперечного сечения ω , поэтому получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (11.5)$$

Для случая широкого прямоугольного русла постоянной ширины в уравнения (11.3) и (11.5) можно ввести элементарный расход $q = Hv$, получив следующую их запись:

$$\left. \begin{aligned} i - \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{\partial (v^2)}{\partial x} + \frac{q^2}{C^2 H^3} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (vH)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Эта система уравнений, именуемая иногда уравнениями Сен-Венана, принимается за основу в ряде решений теоретических и практических задач о неустановившемся движении жидкости в широких призматических руслах. В некоторых случаях представляется, однако, более удобным применение уравнений этой системы, записанных в виде (11.3) и (11.5).

§ 2. Распространение длинных волн при малых подъемах уровня в призматическом русле

Излагаемое ниже решение принадлежит Маккавееву, который выполнил его в связи с задачей теоретического анализа невязких наводнений. В решении рассматривается схематизированный процесс; обычно так и поступают при изучении весьма сложных явлений. В частности, схематизация распространяется и на характер русла, которое принимается широким прямолинейным и прямоугольным.

Предположим, что первоначально в таком русле существовало неравномерное, но установившееся течение, подчиняющееся следующему уравнению движения:

$$\frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{\partial (v_0^2)}{\partial x} - i + \frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{v_0^2}{C^2 H_0} = 0. \quad (11.7)$$

Индексом «0» помечены величины, характеризующие установившееся движение в рассматриваемом потоке.

Под влиянием внешнего воздействия, заключающегося, например, в поступлении добавочного расхода через верхний створ изучаемого участка потока или в воздействии резко изменяющегося атмосферного давления, возникает неустановившееся движение, которое характеризуется изменяющимися во времени и по длине потока скоростями $V(t, x)$ и глубинами $H(t, x)$. Принимая, что величины $V(t, x)$ и $H(t, x)$ на всем участке и во все

время существования неустановившегося движения весьма мало отличаются от величин $v_0(x)$ и $H_0(x)$, производим в первом и последнем членах уравнения (11.7) замену этих величин вышеуказанными

$$\frac{a}{2g} \cdot \frac{\partial(V^2)}{\partial x} - i + \frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{V^2}{C^2 H} = 0. \quad (11.8)$$

Напишем теперь для рассматриваемого неустановившегося движения основное динамическое уравнение

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{a}{2g} \frac{\partial(V^2)}{\partial x} - i + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{V^2}{C^2 H} = 0. \quad (11.9)$$

Вычитая уравнение (11.8) из (11.9), получаем

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(H - H_0)}{\partial x} = 0.$$

Величина производной $\frac{\partial V}{\partial t}$ не изменится, если от функции V , содержащейся над знаком производной, отнять величину v_0 , независющую от времени; поэтому можем написать

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial(V - v_0)}{\partial t} + \frac{\partial(H - H_0)}{\partial x} = 0. \quad (11.10)$$

Введем понятия добавочной скорости v и добавочного подъема уровня ζ , которые обусловлены возмущением первоначально установившегося потока и приводят к приобретению им характера неустановившегося потока. Очевидно, эти добавочные величины будут выражаться следующими разностями:

$$v = V - v_0, \quad \zeta = H - H_0. \quad (11.11)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (11.10) относится именно к добавочным величинам скорости и уровня, обусловленным тем возмущением, которое распространяется в первоначально установившемся потоке. Это уравнение может быть записано так:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (11.12)$$

Получением этого уравнения Маккавеев показал возможность расположения неустановившегося движения на неравномерное установившееся движение и накладывающееся на него волновое движение.

Одновременно с динамическим уравнением (11.12) в решении используется уравнение неразрывности, записываемое для добавочных движений в виде

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (11.13)$$

При больших глубинах и относительно малых скоростях до-
бавочного движения можно считать, что

$$\left| H \frac{\partial v}{\partial x} \right| \gg \left| v \frac{\partial H}{\partial x} \right|,$$

практически принимаем $H \cong H_0 \cong \text{const.}$ В соответствии с этим

$$\frac{\partial}{\partial x} (Hv) \cong H \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11.14)$$

и уравнение неразрывности (11.13) записывается так:

$$H \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (11.15)$$

Выражения (11.12) и (11.15), составляющие систему урав-
нений, Маккавеев преобразует, получая одно уравнение в част-
ных производных второго порядка. Далее он вводит некоторую
величину c , определяемую из равенства

$$c^2 = gH, \quad (11.16)$$

и переходит к новым независимым переменным x_1 и x_2 . Послед-
ние связаны с прежним аргументом x следующим образом:

$$x_1 = x - ct, \quad x_2 = x + ct. \quad (11.17)$$

В конечном итоге Маккавеев получает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (11.18)$$

Интегрирование уравнения по x_2 , а затем по x_1 позволяет по-
лучить

$$\zeta = F(x_1) + f(x_2), \quad (11.19)$$

где $F(x_1)$ и $f(x_2)$ — произвольные функции соответственно от x_1
и x_2 .

Введение в уравнения (11.12) и (11.15) переменных x_1 и x_2 ,
подстановка в них значения ζ , полученного по формуле (11.19), и
преобразования приводят к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_2} &= -\frac{c}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} [f(x_2)]; \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{c}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

Запишем выражение полного дифференциала скорости v

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2.$$

Подставляя сюда значения производных по уравнениям (11.20) и выполняя интегрирование, приходим к выражению

$$v = \frac{c}{H} F(x_1) - \frac{c}{H} f(x_2) + C_*,$$

где C_* — произвольная постоянная интегрирования. При отсутствии волнового движения волновая скорость $v=0$, поэтому постоянная C_* также оказывается равной нулю. Решение принимает вид

$$v = \frac{c}{H} F(x_1) - \frac{c}{H} f(x_2). \quad (11.21)$$

Если теперь последовательно первый и второй члены правой части уравнения (11.19) приравнять нулю, то будем иметь следующие два уравнения мгновенных профилей свободной поверхности (мгновенных профилей волны):

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= F(x_1); \\ \zeta &= f(x_2). \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

Уравнения (11.17) показывают, что переменные x_1 и x_2 зависят от времени и являются подвижными координатами. Проследим за перемещением некоторой фиксированной точки одной из этих координат (например, x_1). Возьмем точку, отвечающую условию постоянства возвышения уровня ζ над положением невозмущенной поверхности.

Очевидно, что

$$\zeta = F(x_1) = \text{const}$$

может иметь место только при

$$x_1 = \text{const}. \quad (11.23)$$

Дифференцируя равенство (11.23) и учитывая (11.17), записываем

$$dx_1 = dx - c dt = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{dx}{dt} = c. \quad (11.24)$$

Такие же рассуждения в отношении функции $f(x_2)$ приводят к равенству

$$\frac{dx}{dt} = -c. \quad (11.25)$$

Равенство (11.24) определяет перемещение прямой волны, распространяющейся со скоростью c относительно неподвижной оси x . Равенство (11.25) определяет перемещение обратной

волны, распространяющейся со скоростью c в сторону отрицательных значений оси x . Уравнение (11.19) показывает, что простое суммирование подъемов перемещающихся в противоположных направлениях волн даст подъем интерферированной волны; при этом величина волновой скорости v определяется формулой (11.21). Волновая скорость v определяет перенос водных масс волновым движением, в то время как c определяет скорость распространения волн.

Абсолютная величина скорости распространения волн выражается формулой

$$c = \sqrt{gH}. \quad (11.26)$$

Иначе c называется фазовой скоростью волны, так как с этой скоростью происходит перемещение фазы волны: ее фронта, максимума, вообще любой точки с фиксированным значением ζ . Это положение относится, конечно, к случаю, когда волна рассматриваемого вида не подвергается искажающему действию внешних факторов, приводящих к ее трансформации.

Если при теоретическом исследовании распространения длинных волн не ограничиваться случаем весьма малых возвышений ζ , то формула скорости c принимает иной вид, и вместо величины H будет содержать сумму $H + \zeta$.

В этом случае оказывается, что чем больше возвышение ζ в некоторой фиксированной точке волны, тем быстрее перемещается эта точка. Таким образом, различные точки волны перемещаются с различными скоростями, что приводит к трансформации волны при ее движении. Как видим, здесь трансформация определяется внутренним для волны фактором; внешние факторы, однако, могут вызывать не только изменение интенсивности такой трансформации, но и изменение ее характера.

§ 3. Длинные волны конечной амплитуды. Метод характеристик

Рассматриваемые в настоящем параграфе теоретические разработки выполнены В. М. Маккавеевым и С. А. Христиановичем. Последний предложил широко используемый в практике метод характеристик. В основе теории лежит схема одномерного движения жидкости в открытом русле, определяемого уравнением

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial (v^2)}{\partial x} - I + \frac{v^2}{C^2 R} = 0. \quad (11.27)$$

Выразим, как мы уже неоднократно поступали, поверхностный уклон I через уклон дна i и производную глубины по длине потока

$$I = i - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (11.28)$$

Вводя обозначение

$$k = g \left(i - \frac{v^2}{C^2 R} \right) \quad (11.29)$$

и производя простейшие преобразования, в частности, учитывая, что $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$ (где B — ширина русла по урезам, ω — площадь сечения потока), приходим к следующей записи динамического уравнения (11.27):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{B} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = k. \quad (11.30)$$

Далее в решении используется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

приводимое к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (11.31)$$

Тождественность этих уравнений очевидна, поскольку, $B d\zeta = d\omega$ и $Q = \omega v$.

Уравнения (11.30) и (11.31) являются основными в рассматриваемой теории.

Переходя к исследованию распространения фронта волны, дадим чисто математическую трактовку понятию фронта.

Областью интеграла дифференциальных уравнений (11.30) и (11.31), определяемого решениями $\omega(x, t)$ и $v(x, t)$, будем называть для фиксированного момента времени t такой отрезок оси x , вдоль которого значения производных

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11.32)$$

являются однозначными, т. е. не имеют разрыва непрерывности. Границу, на которой происходит разрыв непрерывности указанных величин, назовем фронтом волны. При этом фронт будет отделять область одного интеграла от области другого.

Зависимость

$$x = f(t), \quad (11.33)$$

указывающая положение фронта в момент t , является одновременно и закономерностью, определяющей увеличение области одного интеграла (откуда перемещается фронт волны) и уменьшение области другого интеграла (в сторону которого распространяется фронт). На линии фронта будут происходить такие

изменения величин ω и v , которые не будут давать однозначных величин производных

$$\frac{d\omega}{dt} \text{ и } \frac{dv}{dt}$$

и обнаружат уничтожение второго интеграла и становление первого.

Для определения вида зависимости (11.33) преобразуем основные уравнения (11.30) и (11.31). Предварительно напомним выражения следующих полных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}; \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

Подстановка этих равенств в уравнения (11.30) и (11.31) и последующие преобразования позволяют получить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{g}{B} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial t} - k; \\ -\omega \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \frac{\partial\omega}{\partial x} &= \frac{d\omega}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

Здесь величины $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ являются искомыми переменными, относительно которых решаются уравнения, а стоящие при них множители — коэффициентами; величины же правой части уравнений являются свободными членами.

Чтобы уравнения (11.35) давали отвечающее фронту неоднозначное решение, необходимо, чтобы одно из них могло бы быть получено из другого простым умножением коэффициентов и свободного члена на постоянную величину. Такое условие тождественно условию пропорциональности соответствующих коэффициентов уравнений

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{-\omega} = \frac{-\frac{g}{B}}{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)} = \frac{\left(\frac{dv}{dt} - k \right)}{\frac{d\omega}{dt}}. \quad (11.36)$$

Эти равенства могут быть представлены в виде

$$\left(\frac{dx}{dt} - v \right)^2 = \frac{g\omega}{B}, \quad (11.37)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} - v \right) \left(\frac{dv}{dt} - k \right) = -\frac{g}{B} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (11.38)$$

Уравнения (11.37) и (11.38) отвечают фронту волны. Первое из них позволяет найти следующую зависимость производной от пути фронта x по времени (т. е. скорости распространения фронта):

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{\frac{g\omega}{B}}. \quad (11.39)$$

Следует заметить, что из выражения (11.39) может быть получена формула скорости распространения прямой волны c , приведенная без вывода в главе I и в предыдущем параграфе настоящей главы. Считая, что высота волны мала по сравнению с глубиной водоема, мы вправе принять $v \cong 0$. Учитывая далее,

что $\frac{\omega}{B} = H_{\text{cp}}$ и принимая для прямой волны $c = (+) \frac{dx}{dt}$, приходим к следующей знакомой нам формуле:

$$c = \sqrt{gH_{\text{cp}}}.$$

Выражение для производной волновой скорости v по времени у фронта получаем путем деления уравнения (11.38) на (11.39), т. е. приходим к следующему соотношению:

$$\frac{dv}{dt} = k \mp \sqrt{\frac{g}{B\omega}} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (11.40)$$

Уравнения (11.39) и (11.40) называются дифференциальными уравнениями характеристик. Они определяют два семейства характеристик, одно из которых отвечает верхнему алгебраическому знаку перед радикалами, а второе — нижнему.

Первое семейство характеристик, обозначаемое через W , соответствует фронту, распространяющемуся в направлении положительных значений x , т. е.

$$\frac{dx}{dt} = v + \sqrt{\frac{g\omega}{B}} = W. \quad (11.41)$$

Находим отвечающий этому случаю закон изменения скорости

$$\frac{dv}{dt} = k - \sqrt{\frac{g}{B\omega}} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Интегрируем это равенство

$$v = \int k dt - g \int \frac{d\omega}{\sqrt{B\omega}} + C_*. \quad (11.42)$$

Содержащиеся здесь интегралы с включением произвольной постоянной обозначаем через разность двух функций от аргументов t и ω , придавая выражению v следующий окончательный вид:

$$v = \xi(t) - \lambda(\omega). \quad (11.43)$$

Рассмотрим второе семейство характеристик, которое соответствует фронту, распространяющемуся в сторону отрицательных значений x .

Обозначим его через Ω , т. е.

$$\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{\frac{g\omega}{B}} = \Omega, \quad (11.44)$$

при этом

$$\frac{dv}{dt} = k + \sqrt{\frac{g}{B\omega}} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

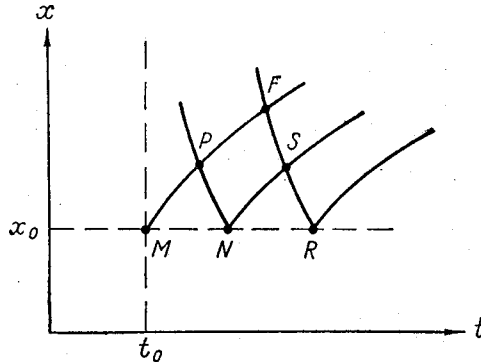


Рис. 11.1. Схема к методу характеристик.

Выполняя интегрирование, записываем

$$v = \int k dt + g \int \frac{d\omega}{\sqrt{B\omega}} + C_{**} = \eta(t) + \lambda(\omega); \quad (11.45)$$

функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ отличаются на постоянную величину.

Дифференциальные уравнения характеристик (11.39) и (11.40) удовлетворяют исходным дифференциальным уравнениям неустановившегося движения независимо от того, находится ли в данной точке фронт волны или нет.

Для расчета неустановившегося движения используются дифференциальные уравнения характеристик, записываемые в форме конечных разностей. Если для некоторых двух элементов (например, M и N) величины, определяющие интеграл (x_M, t_M, ω_M, v_M для элемента M и x_N, t_N, ω_N, v_N для элемента N), оказываются известными, то представляется возможным найти величины (x_P, t_P, ω_P, v_P) нового элемента P (рис. 11.1).

Перемещаясь по закону характеристики первого семейства вдоль оси x от элемента M , согласно уравнениям

$$dx = W dt, \quad dv + d\lambda = d\xi \quad (11.46)$$

(где $d\xi = kdt$), а затем от элемента N — по закону характеристик второго семейства, т. е. на основании уравнений

$$dx = \Omega dt; \quad dv - d\lambda = d\eta \quad (11.47)$$

(где $d\eta = kdt$), приходим в некоторый момент времени t_P в одну и ту же точку x_P и получаем остальные величины (ω_P и v_P) в элементе P (рис. 11.1).

Расчетные формулы, позволяющие выполнить указанные выше вычисления, записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x_M + W_M \Delta t_{MP}; & t_P &= t_M + \Delta t_{MP}; \\ \xi_P &= \xi_M + k \Delta t_{MP}; & x_P &= x_N + \Omega \Delta t_{NP}; \\ t_P &= t_N + \Delta t_{NP}; & \eta_P &= \eta_N + k \Delta t_{NP}. \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

Величины ξ_M и η_N вычисляются по соотношениям

$$\xi_M = v_M + \lambda(\omega_M); \quad \eta_N = v_N - \lambda(\omega_N). \quad (11.49)$$

Величины v_M , v_N , ω_M и ω_N , как указано выше, предполагаются известными. Приращения времени Δt_{MP} и Δt_{NP} определяются из первых двух пар уравнений (11.48), а оставшиеся уравнения используются для нахождения ξ_P и η_P .

Далее переходим к определению v_P и ω_P . Обращаясь к уравнениям (11.43) и (11.45), применяем их к рассматриваемому случаю, записывая следующим образом:

$$\xi_P = v_P + \lambda(\omega_P); \quad \eta_P = v_P - \lambda(\omega_P).$$

Исключая отсюда $\lambda(\omega_P)$, находим

$$v_P = \frac{1}{2} (\xi_P + \eta_P); \quad (11.50)$$

с другой стороны, будем иметь

$$\lambda(\omega_P) = \frac{1}{2} (\xi_P - \eta_P). \quad (11.51)$$

Далее по функции $\lambda(\omega_P)$ можно вычислить ω_P . Итак, для элемента P оказываются вычисленными все искомые величины (x_P , t_P , ω_P , v_P).

Аналогичным образом по заданным величинам элементов N и R (см. рис. 11.1) вычисляются величины элемента S . По вычисленным величинам элементов P и S находятся величины элемента F и т. д. Таким путем по заданным в начальном сечении потока (x_0) элементам неустановившегося движения может быть построена сетка характеристик, дающая решение для всего рассматриваемого участка потока и интересующего нас промежутка времени.

Изложенный метод применим только для участка волны, не выходящего за пределы фронта. На линии фронта производные функций по x и t терпят разрыв непрерывности, что и делает неприменимым метод конечных разностей.

§ 4. Метод мгновенных режимов

Разработка основ метода мгновенных режимов принадлежит Н. М. Бернадскому. Дальнейшее развитие метода осуществлено в трудах В. А. Архангельского, Я. Д. Гильденבלата, а применительно к случаю неустановившегося течения, осложненного воздействием ветра, — в работе автора настоящей книги.

Не останавливаясь детально на методе мгновенных режимов и его модификациях в трактовке различных авторов, рассмотрим лишь его общую схему. Поскольку расчет ведется с применением конечных разностей, метод не предусматривает решения таких задач, которые связаны с продвижением фронта волны. Тем не менее, если нарушения, обусловленные продвижением фронта, невелики или ими можно пренебречь в рассматриваемом конкретном случае, то метод мгновенных режимов может применяться как приближенный.

В основе метода лежат следующие два уравнения: уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (11.52)$$

и динамическое уравнение, которое записывается в наиболее простом виде, не включающем инерционные члены, обусловленные изменением скорости во времени $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ и в пространстве $\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)$. Принимается, что эти члены при рассматриваемом виде неустановившегося медленно изменяющегося движения пренебрежимо малы. Используемое в решении динамическое уравнение имеет вид

$$I = \frac{Q^2}{K^2}, \quad (11.53)$$

здесь, как и ранее, через I обозначен уклон свободной поверхности, а через K — модуль расхода, причем

$$K = \omega C \sqrt{H}.$$

Выражая уклон через отношение падения Δz к длине участка реки Δx и решая уравнение (11.53) относительно расхода, получаем

$$Q = \pm \sqrt{\frac{|\Delta z|}{F}}. \quad (11.54)$$

Модуль сопротивления F , как мы знаем, определяется формулой

$$F = \frac{\Delta x}{K^2}.$$

В формуле (11.54) содержится абсолютная величина падения $|\Delta z|$. Знак расхода (\pm) определяется знаком падения: если падение $\Delta z > 0$, то расход Q положителен (знак $+$), если $\Delta z < 0$, то Q отрицателен. Падение является положительным, если в направлении оси x , совпадающей с направлением течения реки, уровень ζ снижается. Если уровень повышается вдоль x , падение будет отрицательным и, естественно, в этом случае расход Q окажется направленным в сторону отрицательных значений оси x . Последний случай отвечает перемещению обратной положительной волны.

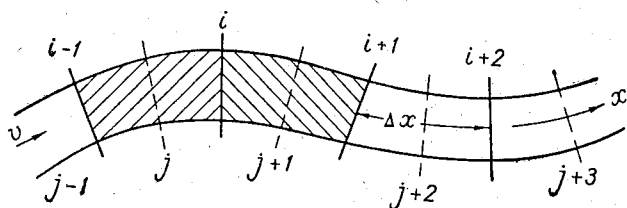


Рис. 11.2. Нумерация профилей и участков при расчете неустановившегося движения методом мгновенных режимов.

Для упрощения записи формул введем обозначение

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{F}}. \quad (11.55)$$

Формула (11.54) приобретет вид

$$Q = \pm \eta \sqrt{|\Delta z|}. \quad (11.56)$$

Часть реки, для которой предполагается выполнить расчет неустановившегося движения, делится поперечниками $i, i+1, i+2$ и т. д. (рис. 11.2) на расчетные участки $j, j+1, j+2$ и т. д. одинаковой длины Δx . Ось x располагается вдоль динамической оси потока. Средние линии участков на рисунке показаны пунктирными поперечниками. Номера этих поперечников совпадают с номерами участков.

Исходные для расчета величины Q и ζ , относящиеся к начальному поперечнику i_0 , задаются в виде графиков или таблиц функций $Q_0(t)$ и $\zeta_0(t)$. Для средних профилей всех участков ($j, j+1, j+2$ и т. д.) вычисляются при разных уровнях ζ^* значения площади зеркала участка Ω и величины η [по формуле (11.55)]. Величина ζ^* представляет собой средний на участке уровень, равный полусумме уровней в начале и конце участка. Строятся

графики или таблицы функций $\Omega(\zeta^*)$ и $\eta(\zeta^*)$. Заметим, что в первом приближении можно принимать $\Omega = B\Delta x$ (где B — средняя ширина участка). При значительной извилистости русла величину Ω лучше находить планиметрированием.

Применим к двум соседним расчетным участкам уравнение неразрывности (11.52). Одним из аргументов уравнения является время t . Мы будем фиксировать состояние потока через равные расчетные интервалы времени Δt , поэтому, представляя указанное уравнение в форме конечных разностей, напомним соответственно для j -го и для $j+1$ участков:

$$\left. \begin{aligned} (Q_{i,k} - Q_{i-1,k})_j \Delta t &= -\Delta_t V_{j,k}; \\ (Q_{i+1,k} - Q_{i,k})_{j+1} \Delta t &= -\Delta_t V_{j+1,k}, \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

где индекс « k » указывает момент времени (t_k) и соответствует номеру интервала Δt , для которого производится вычисление. Величина $\Delta_t V_{j,k}$ выражает изменение во времени объема воды в пределах участка j , происходящее за интервал Δt . Например, можно написать

$$\Delta_t V_{j,k} = \Delta_t \omega_{j,k} \Delta x.$$

Изменение объема воды на участке обуславливает соответствующее изменение среднего уровня, обозначаемое через $\Delta_t \zeta^*$. Для участков j и $j+1$ для интервала k записываем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_t \zeta_{j,k}^* &= \frac{\Delta_t V_{j,k}}{\Omega_{j,k}}; \\ \Delta_t \zeta_{j+1,k}^* &= \frac{\Delta_t V_{j+1,k}}{\Omega_{j+1,k}}. \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

Именно на эти величины к концу k -го интервала на рассматриваемых участках изменятся средние уровни, обозначаемые через ζ^* . Поскольку конец данного интервала Δt совпадает с началом следующего, мы вправе написать

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{j,k+1}^* &= \zeta_{j,k}^* + \Delta_t \zeta_{j,k}^*; \\ \zeta_{j+1,k+1}^* &= \zeta_{j+1,k}^* + \Delta_t \zeta_{j+1,k}^*. \end{aligned} \right\} \quad (11.59)$$

Найденные значения уровней для поперечников j и $j+1$, совпадающих с серединами участков j и $j+1$, позволяют вычислять между поперечниками падение свободной поверхности, которое определяет гидравлику потока на i -том поперечнике (рис. 11.2) в интервал времени $k+1$. Поэтому падению приписываются индексы i и $k+1$

$$\Delta z_{i,k+1} = \zeta_{j,k+1}^* - \zeta_{j+1,k+1}^*. \quad (11.60)$$

Теперь по динамическому уравнению могут быть вычислены значения расходов воды Q , содержащиеся в формулах (11.57).

Записываем указанное уравнение применительно к соответствующим расчетным участкам и интервалам времени: для интервала k

$$\left. \begin{aligned} Q_{i, k} &= \pm \eta_{i, k} \sqrt{|\Delta z_{i, k}|}; \\ Q_{i+1, k} &= \pm \eta_{i+1, k} \sqrt{|\Delta z_{i+1, k}|} \end{aligned} \right\} \quad (11.61)$$

и т. д.,
для интервала $k + 1$

$$\left. \begin{aligned} Q_{i, k+1} &= \pm \eta_{i, k+1} \sqrt{|\Delta z_{i, k+1}|}; \\ Q_{i+1, k+1} &= \pm \eta_{i+1, k+1} \sqrt{|\Delta z_{i+1, k+1}|} \end{aligned} \right\} \quad (11.62)$$

и т. д.

Вычисления выполняются по интервалам времени Δt последовательно вдоль потока, начиная от начального поперечника, где функция $Q_0(\zeta)$ является заданной и поэтому величины Q не вычисляются, а принимаются по таблице или по графику. Произведя вычисления для всех участков вплоть до конечного, возвращаемся к участку I и выполняем расчет для следующего интервала времени Δt .

Расчет ведется в такой последовательности: **интервал первый** — вычисляются приращения объемов [формулы (11.57)], приращения уровней по времени — (11.58); **интервал второй** — средние уровни на участках — (11.59), падения — (11.60), расходы — (11.61), приращения объемов — (11.57), приращения уровней во времени — (11.58); **интервал третий** — средние уровни на участках, и т. д.

Для первого интервала времени на входном створе расчетного участка I , как указано выше, принимается значение расхода по таблице начального створа, а для всех остальных поперечников принимаются расходы, отвечающие установившемуся режиму, имевшему место до начала неустановившегося движения; уровни в начале расчета принимаются равными соответствующим уровням установившегося режима. Выполняя далее расчет, мы будем получать новые значения уровней и расходов. Продвижение новых значений происходит от участка к участку, не быстрее, однако, чем на длину одного расчетного участка Δx за один интервал времени Δt .

Внутри каждого интервала Δt движение принимается неизменным во времени. Для всей рассматриваемой части реки расчет дает мгновенную картину течения (величины ζ и Q), изменяющуюся скачкообразно при переходе от интервала к интервалу. Указанные обстоятельства определили наименование рассматриваемого метода, как «метода мгновенных режимов».

В результате вычислений, выполненных в указанной выше последовательности, получают таблицу значений Q и ζ для всех участков и всех расчетных интервалов времени. Из этой таблицы

производят выборку величин для определенных пунктов, расположенных на реке, и определенных моментов времени.

Расчеты неустановившегося движения, выполняемые как методом характеристик, так и методом мгновенных режимов, отличаются большой трудоемкостью, поэтому в последние годы разработаны способы, предусматривающие использование электронных вычислительных машин для таких расчетов. Методы применения электронных машин излагаются в специальных дисциплинах, посвященных вопросам кибернетики, составлению алгоритмов, программированию, теории счетных машин и т. д. Все это выходит за рамки настоящего курса и здесь не рассматривается.

Детально ознакомиться с методами расчета неустановившегося движения в реках можно по практическому пособию «Расчеты неустановившегося движения воды в реках», составленному в 1967 г. в Государственном гидрологическом институте М. С. Грушевским.

Глава XII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАСТВОРОВ И ТЕПЛА В ПОТОКАХ

§ 1. Вводные замечания о перемешивании водных масс в реках

В турбулентных потоках явлению пульсации скоростей сопутствует перемешивание водных масс; примеси, попавшие в ту или иную часть речного потока или водоема, имеющего заметное течение, увлекаются течениями и под влиянием турбулентного перемешивания распространяются в смежные струи потока. При этом происходит процесс разбавления примесей и в определенных условиях на более или менее значительном расстоянии от места поступления раствора или сброса промышленных или хозяйственных сточных вод концентрация значительно снижается и примесь может стать практически незаметной. Процесс турбулентной диффузии сопровождается и биологическими процессами обезвреживания, которые в свою очередь могут быть связаны с кинематическими условиями потока.

Разбавление сточных вод сопровождается размножением и гибелью микроорганизмов, распадом органических веществ (последних особенно много в промышленных стоках бумажно-целлюлозных заводов и др.). Происходит окисление органических веществ, причем кислород потребляется из воды. Пополнение его запаса происходит за счет аэрации через свободную поверхность, протекающую особенно интенсивно при бурном режиме течения, а также за счет турбулентного переноса из смежных менее загрязненных объемов воды и благодаря деятельности водорослей,

если они оказываются способными развиваться при данной степени загрязнения.

В результате процессов разбавления сточных вод, аэрации, биологических и химических процессов происходит очищение потоков, или, как говорят, самоочищение. В определенных условиях самоочищение может быть практически полным. Самоочищение оказывается сильно затрудненным или даже невозможным, если сточные воды содержат заметное количество устойчивых токсичных веществ. Некоторые из таких веществ даже при самой минимальной концентрации делают воду непригодной для бытового потребления, для жизни рыб, водорослей и т. д. Именно поэтому при проектировании очистных сооружений промышленных предприятий особое внимание обращается на очистку сточных вод от токсичных веществ.

Гидравлическое решение задачи о загрязнении и самоочищении предполагает установление характера распространения и степени разбавления устойчивых химических примесей, однако это решение может оказать существенную помощь и в выяснении всего комплекса явлений, если удастся каким-то образом численно установить характеристики биологических процессов, в частности интенсивности поглощения кислорода, размножения бактерий, распада органических веществ и т. д.

Проблема самоочищения потоков имеет огромное практическое значение, поэтому ей посвящено большое количество научных и теоретических исследований. Расчетные методы оценки процессов разбавления сточных вод предложены рядом исследователей (В. А. Фроловым, И. Д. Родзиллером, А. А. Руффельем, автором настоящей книги и др.). Эти методы применяются при проектировании сбросов сточных вод в реки, озера и водохранилища. Расчеты разбавления позволяют наиболее обоснованно сделать выбор места сброса сточных вод и выявить требования к степени и характеру их очистки.

Рассматриваемые в настоящей главе методы расчета турбулентной диффузии могут быть использованы при решении следующих практических задач: 1) о распространении и разбавлении сточных вод в реках и водохранилищах, 2) о перемешивании растворов при измерениях расходов воды методом смешения (или, как иначе его называют, химическим методом), 3) о смешении водных масс реки и ее притока ниже места их слияния. Эта последняя задача также имеет большое практическое значение при оценке качества воды применительно к задачам промышленного, сельскохозяйственного или бытового водоснабжения.

Конечный эффект перемешивания может быть оценен при использовании приводимых ниже весьма простых соотношений, основанных на уравнении баланса вещества, которое имеет вид

$$s_e Q + s_{cr} Q_{cr} = s_n (Q + Q_{cr}). \quad (12.1)$$

Здесь Q — секундный расход потока (реки), $Q_{ст}$ — расход сточных вод, s_e — естественная концентрация рассматриваемого вещества в речной воде, $s_{ст}$ — концентрация этого вещества в сточных водах непосредственно перед их выпуском в реку, $s_{п}$ — концентрация вещества в потоке ниже места выпуска сточных вод в створе достаточного перемешивания, т. е. там, где благодаря перемешиванию распределение рассматриваемого вещества в поперечном сечении потока оказывается практически равномерным. Значение $s_{п}$ определяется непосредственно по уравнению (12.1), приводимому к виду

$$s_{п} = \frac{s_e Q + s_{ст} Q_{ст}}{Q + Q_{ст}}. \quad (12.2)$$

Уравнение (12.1) используется и при определении расхода воды методом смешения. Если в реку выпускается раствор — индикатор с концентрацией s_p и расходом Q_p , то вычисление расхода реки Q производится по следующей формуле, получаемой непосредственно из уравнения (12.1):

$$Q = \frac{s_p - s_{п}}{s_{п} - s_e} Q_p. \quad (12.3)$$

При весьма малом расходе сточных вод или раствора ($Q_{ст} \ll Q$ или $Q_p \ll Q$) и отсутствии в речной воде того вещества, которое вносится в реку со сточными водами ($s_e = 0$), формулы (12.2) и (12.3) приводятся соответственно к равенствам

$$s_{п} = \frac{s_{ст} Q_{ст}}{Q} \quad (12.4)$$

и

$$Q = \frac{s_p}{s_{п}} Q_p. \quad (12.5)$$

Чтобы получить значение расхода воды в реке Q , необходимо знать Q_p и концентрацию s_p выпускаемого в реку раствора, измерить концентрацию $s_{п}$ в створе достаточного перемешивания и естественную концентрацию выпускаемого в реку вещества s_e выше створа выпуска. Возникает задача — отыскать расстояние от створа выпуска до створа достаточного перемешивания. Для решения этой задачи производится расчет турбулентной диффузии (или, как иногда говорят, расчет разбавления). Та же задача решается и применительно к сточным водам.

Расчет разбавления сточных вод и растворов выполняется в весьма широкой постановке, позволяющей получить не только створ достаточного перемешивания, но и полную картину распределения концентрации в потоке. Для расчета используется дифференциальное уравнение турбулентной диффузии, которое в зависимости от характера потока и особенностей решаемой

задачи записывается с теми или иными упрощениями. Так, например, при отсутствии поперечных скоростей ($v_y = v_z = 0$), равенстве нулю гидравлической крупности частиц ($u = 0$), неизменности процесса разбавления во времени ($\frac{\partial s}{\partial t} = 0$), допустимости принятия постоянства коэффициента турбулентного обмена A уравнение диффузии записывается в виде

$$v_{cp} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{g}{\gamma} A_{cp} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \quad (12.6)$$

Здесь s — концентрация внесенного в поток вещества, выражаемая в $г/м^3$, $кг/м^3$ или в других единицах. Расчет выполняется методом конечных разностей. В качестве граничных условий используются выражения

$$\left. \begin{aligned} (q_s)_{y,0} &= -\frac{g}{\gamma} A_{cp} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_0 = 0; \\ (q_s)_{z,0} &= -\frac{g}{\gamma} A_{cp} \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

показывающие, что перенос растворенного вещества через поверхности, ограничивающие поток (через дно, свободную поверхность, боковые стенки), равен нулю; q_s здесь обозначает секундный расход вещества через единицу площадки; нормаль этой площадки (показанная за скобками) соответственно y или z . Поскольку ни в одной точке турбулентного потока коэффициент A не может быть равен нулю, граничным условиям (12.7) удовлетворяют такие равенства:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_0 = \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)_0 = 0. \quad (12.8)$$

Индексом «0» помечены значения производной у граничных поверхностей потока.

Условия отсутствия переноса вещества за пределы потока тождественны условию постоянства его расхода $Q_s = Q_{стсст}$, которое выражается следующим образом:

$$Q_s = \int_{\omega} sv \, d\omega = \text{const}. \quad (12.9)$$

Интегрирование производится по всей площади поперечного сечения потока ω . Формула (12.9) используется для контроля расчета диффузии, выполняемого методом конечных разностей.

Начальное условие при расчете может задаваться следующим образом: в виде распределения концентрации на начальном поперечнике, в виде расхода и концентрации поступающего в поток раствора или сточных вод и места их выпуска.

§ 2. Уравнение установившейся турбулентной диффузии в форме конечных разностей

Запишем дифференциальное уравнение установившейся турбулентной диффузии (12.6) в форме конечных разностей, заменяя пока чисто формально дифференциалы ds , dx , dy и т. д. малыми конечными разностями, или, как их иначе называют, конечными приращениями Δs , Δx , Δy и т. д.

$$\frac{\Delta_x s}{\Delta x} = \frac{g A_{\text{ср}}}{\gamma v_{\text{ср}}} \left(\frac{\Delta_y^2 s}{\Delta y^2} + \frac{\Delta_z^2 s}{\Delta z^2} \right). \quad (12.10)$$

Разности концентрации s , взятые по оси x , обозначены через $\Delta_x s$, а разности по оси y — через $\Delta_y s$.

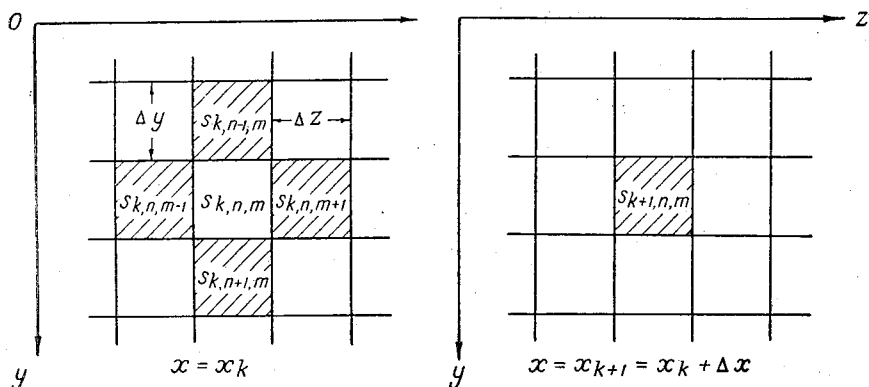


Рис. 12.1. Сетка к расчету турбулентной диффузии. (Пространственная задача.)

Разделим всю изучаемую область потока вдоль направленной по течению оси x поперечными сечениями, отстоящими одно от другого на расстояния Δx и параллельными плоскости yOz . Кривизной потока при таком делении будем пренебрегать. Далее, разделим ту же часть потока вертикальными плоскостями, параллельными плоскости xOy и находящимися на расстояниях Δz друг от друга. В вертикальном направлении рассматриваемую область потока разделим плоскостями, параллельными плоскости xOz с расстояниями между ними Δy .

Таким образом, вся интересующая нас часть потока окажется разделенной на равные прямоугольные параллелепипеды объемом $\Delta x \Delta y \Delta z$ каждый. Схема такого деления в плоскости yOz показана на рис. 12.1, где вычерчены две плоскости, находящиеся друг от друга на расстоянии Δx . Очевидно, что между центрами тяжести соседних параллелепипедов расстояние в направлении

оси x будет Δx , в направлении оси y — Δy и в направлении оси z — Δz .

Пронумеруем параллелепипеды вдоль координатных осей. Каждый параллелепипед получит три номера: один по оси x (обозначаем через k), второй по оси y (обозначаем n) и третий по оси z (обозначаем m). На рис. 12.1 показаны параллелепипеды с номерами: $k, n-1, m$; $k, n, m-1$; $k, n, m, \dots, k+1, n, m$ и т. д.

При выполнении расчета пользуются значениями концентрации s в центрах тяжести выделенных параллелепипедов. Этим концентрациям приписываются те же номера (индексы), что и параллелепипедам, т. е. записывают: $s_{k, n-1, m}$, $s_{k, n, m}$, $s_{k+1, n, m}$ и т. д. Концентрации показаны на рис. 12.1, где предполагается, что плоскости yOz проходят через центры тяжести соответствующих рядов параллелепипедов. Прямоугольники, которые образуются при пересечении параллелепипедов плоскостями yOz , проходящими через их центры тяжести, будем именовать расчетными прямоугольниками, или расчетными клетками. Совокупность таких прямоугольников назовем расчетной сеткой. Заметим, что рассматриваемый ниже метод расчета, основанный на использовании уравнения, записанного в конечных разностях, иногда именуют методом сеток.

Пользуясь обозначениями рис. 12.1, напишем выражения первых и вторых производных, содержащихся в уравнении (12.10). Первые частные производные по x , y и z запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta_x s}{\Delta x} &= \frac{s_{k+1, n, m} - s_{k, n, m}}{\Delta x}; \\ \frac{\Delta_y s}{\Delta y} &= \frac{s_{k, n+1, m} - s_{k, n, m}}{\Delta y}; \\ \frac{\Delta_z s}{\Delta z} &= \frac{s_{k, n, m+1} - s_{k, n, m}}{\Delta z}. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Найдем вторую производную s по y

$$\frac{\Delta_y^2 s}{\Delta y^2} = \frac{\left(\frac{\Delta_y s}{\Delta y}\right)_2 - \left(\frac{\Delta_y s}{\Delta y}\right)_1}{\Delta y}.$$

Вводя сюда значения первых производных, пишем

$$\frac{\Delta_y^2 s}{\Delta y^2} = \frac{\frac{s_{k, n+1, m} - s_{k, n, m}}{\Delta y} - \frac{s_{k, n, m} - s_{k, n-1, m}}{\Delta y}}{\Delta y}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{\Delta_y^2 s}{\Delta y^2} = \frac{s_{k, n+1, m} + s_{k, n-1, m} - 2s_{k, n, m}}{\Delta y^2}. \quad (12.12)$$

Аналогичным образом запишется вторая производная s по z

$$\frac{\Delta_z^2 s}{\Delta z^2} = \frac{s_{k,n,m+1} + s_{k,n,m-1} - 2s_{k,n,m}}{\Delta z^2}. \quad (12.13)$$

Подставляем значения производных в уравнение (12.10)

$$\frac{1}{\Delta x} (s_{k+1,n,m} - s_{k,n,m}) = \frac{gA_{\text{ср}}}{\gamma v_{\text{ср}}} \left[\frac{1}{\Delta y^2} (s_{k,n+1,m} + s_{k,n-1,m} - 2s_{k,n,m}) + \frac{1}{\Delta z^2} (s_{k,n,m+1} + s_{k,n,m-1} - 2s_{k,n,m}) \right]. \quad (12.14)$$

Принимая, что расчетная сетка составлена квадратами, т. е., что $\Delta y = \Delta z$, записываем

$$s_{k+1,n,m} - s_{k,n,m} = \frac{gA_{\text{ср}} \Delta x}{\gamma v_{\text{ср}} \Delta y^2} (s_{k,n+1,m} + s_{k,n-1,m} + s_{k,n,m+1} + s_{k,n,m-1} - 4s_{k,n,m}).$$

Вводя обозначение

$$a = \frac{gA_{\text{ср}} \Delta x}{\gamma v_{\text{ср}} \Delta y^2}, \quad (12.15)$$

приходим к следующему выражению:

$$s_{k+1,n,m} = a (s_{k,n+1,m} + s_{k,n-1,m} + s_{k,n,m+1} + s_{k,n,m-1}) + (1 - 4a) s_{k,n,m}. \quad (12.16)$$

Полученное уравнение позволяет производить расчет распределения концентрации s в каждом последующем сечении потока по данным о распределении s в предыдущем сечении. Для упрощения расчета целесообразно подчинить величину a определенному условию, именно принять

$$a = \frac{1}{4}, \quad (12.17)$$

что приводит к равенству

$$1 - 4a = 0.$$

Уравнение (12.16) при этом принимает вид

$$s_{k+1,n,m} = \frac{1}{4} (s_{k,n+1,m} + s_{k,n-1,m} + s_{k,n,m+1} + s_{k,n,m-1}). \quad (12.18)$$

Как видим, концентрация в клетке $k + 1, n, m$ (на рис. 12.1 эта клетка заштрихована) находится как среднее арифметическое из концентраций в четырех клетках: $k, n + 1, m$, $k, n - 1, m$, $k, n, m + 1$, $k, n, m - 1$ предыдущего сечения (на рисунке эти клетки заштрихованы). Расчетная зависимость (12.18) позволяет произвести расчет концентраций в клетках последующего сечения

по распределению концентраций в клетках предыдущего сечения. Расстояние Δx между указанными сечениями оказывается при этом строго определенным зависимостью (12.17), согласно которой

$$\Delta x = \frac{\gamma v_{\text{ср}} \Delta y^2}{4gA_{\text{ср}}}. \quad (12.19)$$

Рассмотренные здесь формулы позволяют получить распределение концентрации по длине, ширине и глубине потока при неизменном во времени режиме потока и постоянстве расхода и концентрации выпускаемого в поток вещества, т. е. получить установившееся пространственное поле концентрации.

Ввиду некоторой громоздкости расчета, выполняемого по схеме пространственной задачи, в ряде случаев можно применить формулы, отвечающие плоской задаче. Такая возможность появляется, например, при выпуске раствора в поток, имеющий относительно малую глубину, т. е. когда $H \ll B$, где B — ширина потока. В этом случае перемешивание по глубине осуществляется во много раз быстрее, чем по ширине, и главный интерес при расчете разбавления представляет вопрос о распространении выпускаемого вещества по ширине потока. По глубине при таком расчете концентрация считается неизменной.

Плоская задача об установившемся разбавлении (в горизонтальной плоскости) решается при использовании уравнения турбулентной диффузии, записанного таким образом:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{gA_{\text{ср}}}{\gamma v_{\text{ср}}} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (12.20)$$

(xOz — горизонтальная плоскость).

В конечных разностях это уравнение записывается так:

$$s_{k+1, m} = a(s_{k, m+1} + s_{k, m-1}) + (1 - 2a)s_{k, m}; \quad (12.21)$$

здесь

$$a = \frac{gA_{\text{ср}} \Delta x}{\gamma v_{\text{ср}} \Delta z^2}. \quad (12.22)$$

Принимая

$$a = \frac{1}{2}, \quad (12.23)$$

т. е. полагая, что Δx и Δy связаны соотношением

$$\Delta x = \frac{\gamma v_{\text{ср}} \Delta z^2}{2gA_{\text{ср}}}, \quad (12.24)$$

приходим к следующей расчетной формуле:

$$s_{k+1, m} = \frac{1}{2}(s_{k, m+1} + s_{k, m-1}). \quad (12.25)$$

Отсюда ясно, что концентрация в центре тяжести клетки $(k+1, m)$ в сечении $k+1$ равна среднему арифметическому из концентраций в двух клетках, соприкасающихся с клеткой (k, m) в предыдущем сечении k . При расчете поток в плане разбивается сеткой, каждая вертикальная линия которой отвечает определенному поперечному сечению и предполагается отстоящей от предыдущей и последующей на длину Δx . Расстояние между горизонтальными линиями равно Δz .

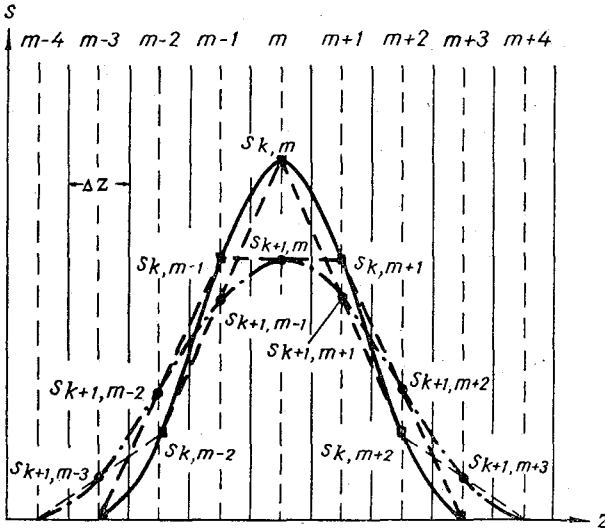


Рис. 12.2. Расчет турбулентной диффузии графическим методом Э. Шмидта.

При решении плоской задачи о диффузии раствора в потоке может быть использован графический метод Э. Шмидта, разработанный им применительно к задачам теплопроводности, но вполне пригодный для расчета диффузии. Рассмотрим этот метод на следующем конкретном примере.

На рис. 12.2 сплошной кривой показано распределение концентрации по ширине прямоугольного канала в сечении k . Требуется найти распределение концентрации в сечении $k+1$, в последующих сечениях и определить расстояние между этими сечениями, если известно, что при разбивке потока на расчетные клетки использовано равенство (12.24).

На рисунке отложена полная ширина канала B и показана разбивка ее на равные элементы Δz . Концентрации даны в серединах элементов Δz , середины элементов показаны пунктирами $m, m-1, m+1$ и т. д. Если концентрации на пунктирных линиях m и $m+2$ соответственно равны величинам $s_{k,m}$ и $s_{k,m+2}$, то,

очевидно, среднее арифметическое из них равно отрезку, расположенному на пунктире $m + 1$ и заключенному между осью абсцисс и прямой, соединяющей точки $s_{k, m}$ и $s_{k, m+2}$. Это среднее значение есть не что иное, как концентрация в сечении $k + 1$ в точке $m + 1$.

Таким образом, чтобы получить распределение концентрации для некоторого профиля, отстоящего от данного на Δx вниз по течению, следует соединить прямыми линиями точку $m - 4$ (где $s = 0$) с точкой $s_{k, m-2}$, точку $s_{k, m-3}$ с точкой $s_{k, m-1}$ и т. д. через одну. На пересечении прямых с пунктирными линиями $m - 3$, $m - 2$ и т. д. получим точки $s_{k+1, m-3}$, $s_{k+1, m-2}$ и т. д., которые и будут давать искомое распределение концентрации в сечении $k + 1$. Исходя из этого нового графика, таким же способом можно получить следующий, и так до тех пор, пока не будет найдено распределение концентрации на всем исследуемом участке потока.

Расстояние Δx между поперечниками, очевидно, находится по формуле (12.24) при подстановке туда численных значений гидравлических элементов потока и принятой величины Δz .

Достоинством графического метода является его наглядность, для расчета же удобнее пользоваться табличным методом, когда все значения концентрации вписываются в расчетные клетки, расположенные в таблицах в таком же порядке, в каком они найдены на плане потока (в плоской задаче) или на его поперечных сечениях (в пространственной задаче).

§ 3. Учет граничных и начальных условий при расчете диффузии

Рассмотренные в предыдущем параграфе формулы являются достаточными для расчета турбулентной диффузии в потоке на некотором удалении от ограничивающих поток стенок при заданном распределении концентрации на начальном поперечнике. Когда раствор достигает стенок, то для расчета диффузии наряду с этими формулами следует использовать соотношение, учитывающее особое условие у стенок. Это условие определяется равенством (12.8), которое в конечных разностях для поперечной оси z записываем так:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta z} \right)_{\text{гр. пов}} = 0. \quad (12.26)$$

Поле концентрации, а вместе с тем и расчетную сетку можно условно распространить за пределы потока, т. е. проэкстраполировать концентрацию за ограничивающие поток поверхности. При этом экстраполяционное значение концентрации в клетке, примыкающей к внешней поверхности стенки $s_{\text{экстр}}$ и значение концентрации s_1 в клетке, находящейся в потоке и примыкающей к внутренней поверхности стенки на том же поперечнике

(рис. 12.3), должны удовлетворять условию (12.26). Это возможно только в том случае, если

$$s_{\text{экстр}} = s_1. \quad (12.27)$$

Соотношение (12.27) определяет правило экстраполяции концентрации раствора. То же правило действует для экстраполяции s через поверхность дна и свободную поверхность потока, если расчет диффузии выполняется для вертикальной плоскости.

При расчете диффузии по формулам (12.18) и (12.25) экстраполяционные значения используются так, как если бы это были

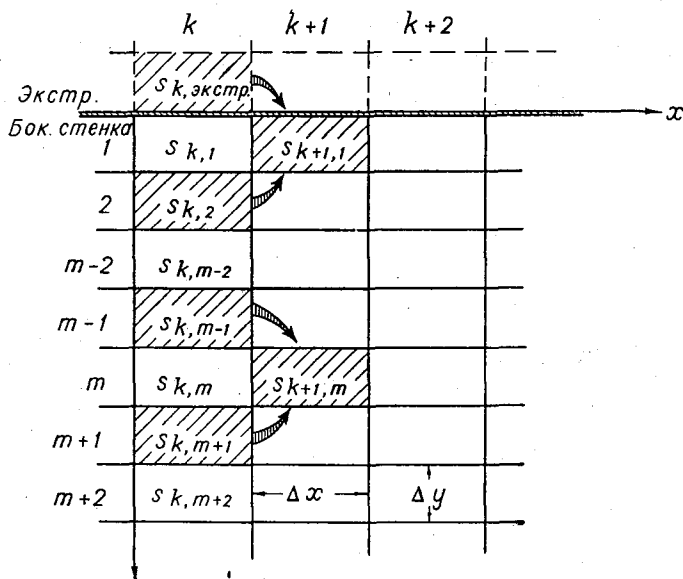


Рис. 12.3. Сетка к расчету турбулентной диффузии. (Плоская задача.)

действительные значения концентрации. Это наглядно демонстрируется на рис. 12.3, где стрелками показаны величины, используемые при нахождении $s_{k+1, m}$ и $s_{k+1, 1}$, именно

$$s_{k+1, m} = \frac{1}{2} (s_{k, m-1} + s_{k, m+1});$$

$$s_{k+1, 1} = \frac{1}{2} (s_{k, \text{экстр}} + s_{k, 2}).$$

Остановимся теперь на учете начальных условий при задании места выпуска раствора, его расхода Q_p (или $Q_{\text{ст}}$) и концентрации выпускаемого вещества s_p (или $s_{\text{ст}}$). Эти значения концентрации называем начальной концентрацией.

На плане потока показывается место выпуска раствора или сточных вод и через него проводится начальный поперечник. Далее, ниже по течению, поток схематизируется и делится на расчетные клетки. Скорость течения струи раствора в месте его впадения в поток принимается равной скорости течения потока $v_{\text{пот}}$. Далее находится площадь поперечного сечения δ струи раствора в месте его впадения

$$\delta = \frac{Q_p}{v_{\text{пот}}} \quad (12.28)$$

Если решается плоская задача и при том выполняется расчет распределения концентрации в плане потока, то из соотношения (12.28) находят величину Δz . Делается это на основании следующих соображений. Ширина струи раствора, впадающей у берега, на начальном профиле должна быть равна не менее чем ширине одной расчетной клетки. При впадении струи в поток на некотором удалении от берега ее начальная ширина должна равняться ширине не менее чем двух расчетных клеток.

Ширину струи раствора (или сточных вод) находим из соотношения

$$b_p = \frac{\delta}{H_{\text{ср}}} = \frac{Q_p}{H_{\text{ср}} v_{\text{пот}}}, \quad (12.29)$$

где глубина $H_{\text{ср}}$ и скорость $v_{\text{пот}}$ характеризуют средние величины для рассматриваемого участка реки.

При впадении струи раствора у берега наибольшая допустимая величина Δz находится из соотношения

$$\Delta z = b_p = \frac{Q_p}{H_{\text{ср}} v_{\text{пот}}}. \quad (12.30)$$

При впадении струи в удалении от берега наибольшая величина Δz определяется равенством

$$\Delta z = \frac{b_p}{2} = \frac{Q_p}{2H_{\text{ср}} v_{\text{пот}}}. \quad (12.31)$$

При выполнении расчета турбулентной диффузии составляются расчетные таблицы, расчетная сетка. Клетки, попадающие в струю раствора на начальном поперечнике, заполняются цифрами, выражающими начальную концентрацию раствора, остальные клетки — цифрами, выражающими естественную концентрацию вещества в реке (в частном случае это может быть нулевая концентрация).

Заметим, что расчет разбавления сточных вод можно выполнять и относительно общего фона, создаваемого естественной концентрацией рассматриваемого вещества в реке. В этом случае за расчетную концентрацию вещества в сточных водах прини-

мается разность между действительным его содержанием в сточных водах и естественной концентрацией. Это позволяет в расчетах естественную концентрацию принимать равной нулю, а исправление на s_e вносить в окончательный результат расчета.

При решении пространственной задачи количество расчетных клеток в начальном сечении струи раствора подбирается в зависимости от того, какое место занимает струя в поперечном сечении потока. В отдельных случаях берут 2—4—9 клеток. Расчет для последующих профилей должен давать плавное распределение концентрации. При получении скачкообразного распределения s необходимо увеличить число клеток в струе, т. е. уменьшить их размеры (величины Δy и Δz), следя за соблюдением условия непрерывности.

Рассмотренные здесь правила нахождения величин Δy и Δz обычно приводят к получению относительно малых значений этих величин, поэтому на начальном участке потока количество расчетных клеток получается большим, а «шаги» расчета (т. е. величины Δx) малыми. Чтобы упростить расчет на последующих участках, через несколько расчетных интервалов Δx производят объединение клеток по ширине или соответственно по сечению (по 2, по 4 клетки и более) и осреднение концентрации в объединенных клетках для получения значений s в центрах тяжести новых клеток. Получив таким образом новое деление потока по ширине или соответственно по сечению, вычисляют новые значения Δx и продолжают расчет. Такую операцию объединения можно повторять несколько раз.

§ 4. Учет поперечных течений при расчете диффузии

При преобразовании основного уравнения турбулентной диффузии было использовано предположение о приближенном равенстве нулю поперечных составляющих скорости v_y и v_z и получено для пространственной задачи, взятой при известных ограничениях, уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{A}{v_x} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right).$$

Приближенное решение этого уравнения может быть выполнено методом сеток. Использование указанного метода открывает возможность учета внутренней циркуляции (величин v_y и v_z , которыми первоначально пренебрегали). При этом использование особого приема позволяет сохранить неизменными расчетные уравнения.

Будем рассматривать случай, когда v_x значительно больше, чем v_y и v_z . Введем новую криволинейную ось x , направленную

по траектории частицы и определяемую относительно прежней прямолинейной системы координат уравнением

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z)}. \quad (12.32)$$

Если переменную x заменить в приведенном выше уравнении турбулентной диффузии переменной \mathbf{x} , то уравнение будет справедливо для некоторой ограниченной области вокруг этой новой оси в предположении, что кривизна оси \mathbf{x} мала, а получающаяся новая система координат может быть приближенно принята за прямоугольную в пределах той же ограниченной области.

Выберем в верхней части рассматриваемого участка потока какой-либо поперечный профиль и разобьем его на элементы (или клетки) $\Delta\omega = \Delta y \Delta z$. Отметив каждую клетку буквами k, n, m , получим возможность проследить движение каждой клетки от избранного профиля вниз по течению; при этом на траектории каждой клетки будем получать одни и те же n и m и разные k . Если бы поперечные составляющие (в первоначальной прямоугольной системе координат) скорости v_y и v_z равнялись нулю, то все траектории клеток были бы параллельными и каждый элемент $\Delta\omega$ не менял бы своего относительного расположения при переходе от профиля к профилю. Все поверхностные клетки оставались бы на поверхности, донные — у дна и т. д. Благодаря наличию поперечной циркуляции каждый элемент, кроме движения вниз по течению, будет совершать еще некоторое перемещение в поперечном направлении.

Это перемещение будет определяться величиной поперечных составляющих скорости и вызовет изменения в относительном расположении элементов: поверхностные элементы переместятся, скажем, в направлении правого берега, некоторые из них опустятся вниз и займут место нескольких донных клеток; донные же клетки переместятся влево и частично выйдут на поверхность. При этом окажется, что клетки различных слоев, соприкасавшиеся друг с другом, положим, на профиле k , на профиле $k + 1$ будут удалены одна от другой и будут соприкасаться уже с другими клетками.

Выделяя в потоке на достаточно коротком участке некоторую область близких друг другу траекторий, находя среднюю траекторию для этой области и приближенно принимая ее за прямую, получаем возможность применить к этой области метод сеток в обычном виде. Пограничные условия для каждой из таких областей будут заключаться в том, что диффузия через ограничивающие их поверхности будет равна произведению коэффициента турбулентной диффузии на производную от концентрации по нормали к этим поверхностям, т. е. условия на поверхностях раздела ничем не будут отличаться от условий на любой произвольно взятой поверхности внутри потока.

Расчет диффузии раствора при учете поперечной циркуляции

		θ										
		2,0	3,0	7,0	9,0	10,0	10,0	9,0	8,0	5,0	3,0	
Профиль θ ($x=0$)	2,0	2,0	3,0	7,0	9,0	10,0	<u>10,0</u>	9,0	8,0	5,0	3,0	3,0
	1,0	1,0	2,0	6,0	8,0	9,0	<u>9,0</u>	7,0	6,0	3,0	2,0	2,0
		1,0	2,0	6,0	8,0	9,0	9,0	7,0	6,0	3,0	2,0	

		θ									
		2,0	3,5	6,3	8,5	9,5	<u>9,5</u>	8,5	7,0	4,2	3,3
Профиль I_a ($x=\Delta x$)		1,5	2,5	5,8	8,0	9,0	<u>8,7</u>	7,8	6,0	4,0	2,5

						θ_1			$v_z \rightarrow$			
		1,5	2,0	3,5	6,3	8,5	9,5	9,5	8,5	7,0	4,2	
Профиль I ($x=\Delta x$)	1,5	1,5	2,0	3,5	6,3	8,5	9,5	<u>9,5</u>	8,5	7,0	4,2	4,2
	2,5	2,5	5,8	8,0	9,0	<u>8,7</u>	7,8	6,0	4,0	2,5	3,3	3,3
		2,5	5,8	8,0	9,0	8,7	7,8	6,0	4,0	2,5	3,3	

							θ_1				
		1,9	3,2	4,9	6,8	8,3	8,8	<u>8,4</u>	7,3	5,6	4,7
Профиль $2a$ ($x=2\Delta x$)		3,1	4,0	6,8	8,0	<u>8,5</u>	8,0	6,8	5,2	4,2	3,3

							θ_2			$v_z \rightarrow$	
		3,1	1,9	3,2	4,9	6,8	8,3	8,8	<u>8,4</u>	7,3	5,6
Профиль 2 ($x=2\Delta x$)		4,8	6,6	8,0	<u>8,5</u>	8,0	6,8	5,2	4,2	3,3	4,7

Отсюда следует, что в данном случае для всего потока может быть применен метод сеток в обычном виде. Разница будет заключаться лишь в том, что расстояния между расчетными профилями должны измеряться не по оси x , а по траекториям x . Однако вследствие обычной малости поперечных составляющих скорости можно без особой погрешности, как и прежде, вести отсчет по прямолинейной оси x . Что касается учета внутренней циркуляции, то он будет осуществляться путем перемещения каждой клетки по ее собственной траектории, а не по некоторому среднему направлению, как это приходится принимать при пренебрежении поперечными составляющими скорости. Поясним изложенное на простейшем примере.

Положим, что надо выполнить расчет для короткого прямолинейного участка потока с прямоугольным сечением русла. Пусть

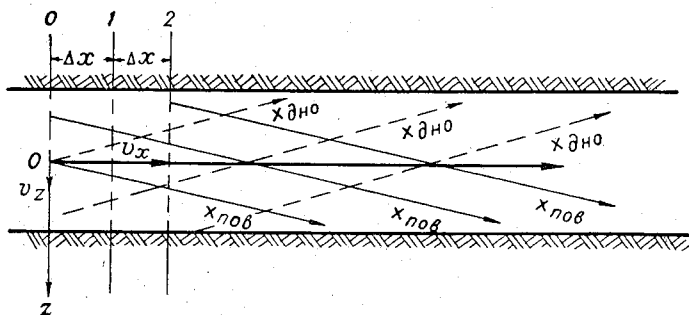


Рис. 12.4. Расположение координатных осей x в поверхностном и придонном слоях потока.

в потоке имеется внутреннее течение, являющееся, скажем, следствием выше лежащего закругления русла. В поверхностном слое это течение направлено от левого берега к правому, в придонном — в противоположную сторону. Пусть на рассматриваемом участке поперечная составляющая скорости v_z некоторого горизонтального слоя остается постоянной по длине потока и мало меняется по ширине. Примем для простоты только два слоя по глубине и равенство средних абсолютных значений поперечных составляющих скорости для каждого из них: поверхностного (v_z) и донного ($-v_z$). Что касается восходящих и нисходящих течений, то будем считать их приуроченными лишь к береговым областям. В соответствии с этим траектории клеток для средней части потока могут быть получены из уравнений:

$$\text{для поверхностного слоя} \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}, \quad (12.33)$$

$$\text{для донного слоя} \quad \frac{dx}{v_x} = -\frac{dz}{v_z} \quad (12.34)$$

(в этих уравнениях функции $v(x, y, z)$ заменены средними значе-

ниями соответствующих составляющих). Полученные траектории клеток поверхностного слоя $x_{\text{пов}}$ и донного слоя $x_{\text{дон}}$ изображены на рис. 12.4.

Вычертим поперечный профиль 0 (табл. 12.1), находящийся в начале координат, и разделим его на квадратные клетки площадью $\Delta y \Delta z$ каждая (в таблице размеры клеток не выдержаны). Пусть в этом профиле задано распределение концентрации s . Вписываем в каждую клетку соответствующее значение концентрации. Для подсчета концентрации на следующем профиле пользуемся формулой

$$s_{k+1, n, m} = \frac{1}{4} (s_{k, n+1, m} + s_{k, n-1, m} + s_{k, n, m+1} + s_{k, n, m-1}).$$

Результаты вычислений пишем в клетки такого же профиля (табл. 12.1 профиль $1 a$). Полученное распределение концентрации будет относиться к профилю, находящемуся на расстоянии Δx от начального, причем Δx вычисляем по формуле

$$\Delta x = \frac{\Delta y^2}{4a}.$$

Проведя на рис. 12.4 профиль 1 , найдем на нем точку 0_1 , по которой определим величину смещения точки 0 вправо от оси. Величина этого смещения должна быть учтена при построении распределения концентрации на профиле 1 (аналогично учитывается и перемещение придонных клеток). В табл. 12.1 (профиль 1) дано распределение концентрации, получающееся при учете смещения поверхностных и придонных клеток на профиле 1 (при $x = \Delta x$). Это и будет окончательная картина распределения концентрации на профиле 1 . Чтобы получить распределение концентрации на профиле 2 , соответствующем абсциссе $x = 2\Delta x$, выполним расчет диффузии. Расчет дает показанное на профиле $2 a$ распределение s ; чтобы учесть поперечную циркуляцию, смещаем на соответствующую величину поверхностные клетки вправо, а донные влево и тогда получаем окончательное для профиля распределение концентрации (профиль 2). Продолжая выполнять попеременно расчеты и перемещения, можно построить распределение концентрации на всем участке.

Применение изложенного метода к конкретным случаям показало, что поперечная циркуляция сильно ускоряет процесс разбавления (в 2—4, иногда в 10 и даже более раз).

§ 5. Об определении створа достаточного перемешивания

Разработанные автором настоящей книги и рассмотренные выше методы расчета турбулентной диффузии могут использоваться, в частности, для определения створа достаточного перемешивания или створа с заданной степенью перемешивания.

Полноту выравнивания концентрации можно выразить величиной δ (в процентах), причем при равенстве нулю естественной концентрации

$$\delta = \frac{s_{\text{наиб}} - s_{\text{ср}}}{s_{\text{ср}}} 100. \quad (12.35)$$

Здесь $s_{\text{наиб}}$ — наибольшая концентрация на поперечном профиле потока, находящемся на расстоянии L_δ от места выпуска раствора, $s_{\text{ср}}$ — средняя концентрация на этом профиле. Если естественная концентрация s_e рассматриваемого вещества не равна нулю, то ее величина вычитается из каждого значения концентрации, содержащегося в формуле (12.35).

Этими величинами и предлагается пользоваться при расчетах.

Разработкой вопроса об определении расстояния до створа достаточного перемешивания в связи с задачей о разбавлении сточных вод занимались В. А. Фролов, И. Д. Родзиллер и др.

Родзиллером предложена такая формула:

$$L_\delta = \left[\frac{2,3}{\alpha} \lg \frac{(1 - \delta) Q + Q_{\text{ст}}}{\delta Q_{\text{ст}}} \right]^3. \quad (12.36)$$

При расчете расстояния достаточного перемешивания Родзиллер рекомендует принимать величину $(1 - \delta)$ равной 0,8—0,95.

Коэффициент α в приведенной формуле учитывает гидравлику потока. Для вычисления этой величины Фроловым предложена формула

$$\alpha = \varphi \xi \sqrt[3]{\frac{gA}{\gamma Q_{\text{ст}}}}, \quad (12.37)$$

где $\frac{g}{\gamma} A$ — коэффициент турбулентной диффузии, вычисляемой по известной нам формуле, ξ — коэффициент, который при выпуске раствора у берега принимается равным 1, а при выпуске в середине реки $\xi = 1,5$. В формуле (12.37) содержится коэффициент извилистости реки φ , который предусматривает приближенный учет влияния поперечных течений на интенсивность разбавления раствора. Для вычисления φ рекомендуется формула

$$\varphi = \frac{l_\phi}{l_n}, \quad (12.38)$$

где l_ϕ — расстояние между двумя створами реки по фарватеру, l_n — расстояние между теми же створами по прямой. Для определения φ фиксируется участок реки, длина которого предположительно близка к длине L_δ .

Следует заметить, что приведенная в этом параграфе формула (12.36) может применяться лишь для ориентировочных расчетов, в целях получения порядка величины расстояния до створа достаточного перемешивания. Не является достаточно точным и

изложенный в предыдущих параграфах настоящей главы метод конечных разностей, однако его применение при учете поперечных течений должно приводить к получению более достоверных результатов, чем результаты, получаемые по приближенным зависимостям.

§ 6. Неустановившаяся диффузия

Рассмотренные выше методы расчета разбавления сточных вод могут использоваться как для условий рек, так и для водохранилищ и озер при наличии в последних заметных устойчивых течений, переносящих сточные воды от источника их поступления в водоем. В озерах и водохранилищах, однако, может складываться такая гидрометеорологическая обстановка, когда в определенные периоды времени течения на том или ином участке оказываются практически незаметными. В этом случае в месте выпуска сточных вод будет происходить их накопление, сопровождаемое диффузией. Хотя при весьма малых скоростях турбулентность будет малой, но тем не менее случай полного отсутствия турбулентности в более или менее значительном водоеме представляется невозможным. При рассмотрении задачи о процессах перемешивания, сопутствующих накоплению сточных вод в зоне их выпуска, будем пользоваться близкой к реальной, хотя и несколько условной, схемой, согласно которой скорости течения в зоне выпуска сточных вод считаются равными нулю, а турбулентность — равной, хотя и малой, но все же конечной величине. Турбулентность обусловлена в этом случае теми течениями, которые не учитываются ввиду их малости и главное изменчивости направления, что приводит к тому, что выход сточных вод все время будет происходить в сильно загрязненной массы воды, т. е. в облако загрязнения, середина которого будет лишь блуждать под влиянием слабых изменяющихся по направлению течений возле места сброса сточных вод и пополняться последними.

Картина такого процесса может быть еще больше схематизирована. Можно принять неподвижность облака загрязнения и считать источник загрязнения расположенным в его центре.

При появлении устойчивых течений облако загрязнения получает поступательное движение и, оторвавшись от места выпуска сточных вод, в процессе перемещения продолжает расширяться за счет диффузии, уменьшая постепенно свою концентрацию.

Рассмотренный здесь процесс накопления, диффузии и перемещения облака загрязнения исследован автором теоретически и на основе полученной теоретической зависимости разработан метод расчета.

Представим себе область загрязнения в виде полного круга πr^2 (если выпуск сточных вод в озеро или водохранилище производится на некотором удалении от берега) или в виде сектора

с углом φ (если выпуск производится у берега). Выделим в этой области сектор с углом α , расположенным в точке выпуска сточных вод, и составим для части кольца, заключенного в этом секторе, уравнение баланса вещества. Пусть расход сточных вод постоянен и равен $Q_{ст}$. В сектор с углом α будет поступать расход q_α , определяемый равенством

$$q_\alpha = \frac{\alpha}{\varphi} Q_{ст}. \quad (12.39)$$

Расход воды через все дуги выделенного сектора одинаков, т. е. вдоль радиуса r он не изменяется. Расход вещества вдоль радиуса r уменьшается в связи с уменьшением концентрации s .

Выделим внутри рассматриваемого сектора контрольный объем воды в виде части кольца, заключенной между двумя дугами l_a и l_b и радиусами, образующими сектор с углом α .

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} l_a &= \alpha r_a, \\ l_b &= \alpha r_b. \end{aligned} \right\} \quad (12.40)$$

Перенос вещества через дуги определится расходом q_α и турбулентной диффузией. При взятой схеме расход воды через радиус равен нулю, так же как и турбулентный перенос вещества. Последнее обусловлено тем, что изолинии концентрации совпадают с окружностями, т. е. в направлении, нормальном радиусам, концентрация не изменяется.

Поступление вещества в контрольный объем через дугу l_a за время Δt выражается величиной

$$\left[q_\alpha s_a - \frac{g}{\gamma} A \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_a l_a H \right] \Delta t. \quad (12.41)$$

Выход вещества из контрольного объема через дугу l_b за то же время будет

$$\left[q_\alpha s_b - \frac{g}{\gamma} A \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_b l_b H \right] \Delta t. \quad (12.42)$$

Индексами « a » и « b » обозначены величины, относящиеся соответственно к дугам a и b . Глубину H и коэффициент турбулентной диффузии $\frac{g}{\gamma} A$ для всей области загрязнения считаем постоянными.

Составим уравнение баланса вещества

$$\begin{aligned} & \left[q_\alpha s_a - \frac{g}{\gamma} A \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_a \alpha r_a H - q_\alpha s_b + \right. \\ & \left. + \frac{g}{\gamma} A \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_b \alpha r_b H \right] \Delta t = \Delta P_o. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Здесь ΔP_s — изменение количества вещества в контрольном объеме за время Δt . Заметим, что контрольный объем δV определяется выражением

$$\delta V = \alpha r \Delta r H,$$

где $\Delta r = r_b - r_a$. Для упрощения обозначений примем $r_a = r$, $r_b = r + \Delta r$, $s_a = s$. Используя частные производные концентрации s по радиусу r и по времени t , напомним

$$\Delta P_s = \frac{\partial s}{\partial t} \alpha H r \Delta r \Delta t, \quad (12.44)$$

$$s_b = s + \frac{\partial s}{\partial r} \Delta r. \quad (12.45)$$

Можно написать и следующие тождественные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_a &= \frac{\partial s}{\partial r}; \\ \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)_b &= \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right) \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (12.46)$$

Подставляя в уравнение (12.43) соотношения (12.44), (12.45), (12.46), а также значения s_a и r_a , выполняя простые алгебраические преобразования, приходим к следующему виду уравнения:

$$\alpha H r \frac{\partial s}{\partial t} = -q_a \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{g}{\gamma} A \alpha H \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{g}{\gamma} A \alpha H r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2}. \quad (12.47)$$

Деля это уравнение на $\alpha H r$ и учитывая, что

$$\frac{q_a}{\alpha} = \frac{Q_{ст}}{\varphi},$$

получим следующую окончательную запись дифференциального уравнения турбулентной диффузии в цилиндрических координатах для случая расположения источника загрязнения в центре координат:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{g}{\gamma} A - \frac{Q_{ст}}{\varphi H} \right) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{g}{\gamma} A \frac{\partial^2 s}{\partial r^2}. \quad (12.48)$$

Уравнение (12.48) может быть записано в форме конечных разностей и использовано для расчета.

Обратимся к рис. 12.5, на котором изображен сектор с углом α , выделенный в зоне загрязнения. Источник загрязнения с расходом $Q_{ст}$ находится в центре координат. На рисунке показаны обозначения величин концентрации s для момента времени t_h в центрах тяжести отсеков $n-1$, n и $n+1$ (концентрации $s_{h, n-1}$, $s_{h, n}$, $s_{h, n+1}$) и для момента времени t_{h+1} в отсеке n

(концентрация $s_{k+1, n}$). Пользуясь этими обозначениями, записываем уравнение (12.48) в форме конечных разностей таким образом:

$$\frac{1}{\Delta t} (s_{k+1, n} - s_{k, n}) = \frac{\beta}{2r_n \Delta r} (s_{k, n+1} - s_{k, n-1}) + \frac{gA}{\gamma \Delta r^2} (s_{k, n+1} + s_{k, n-1} - 2s_{k, n}), \quad (12.49)$$

где

$$\beta = \frac{g}{\gamma} A - \frac{Q_{ст}}{\varphi H}. \quad (12.50)$$

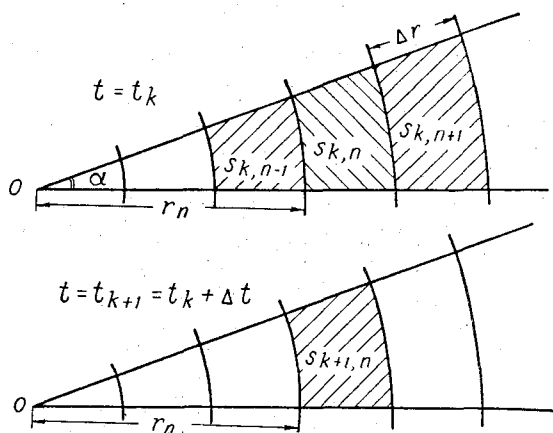


Рис. 12.5. Схема к расчету процесса накопления и диффузии сточных вод при малых неустойчивых течениях.

Если далее принять

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta \Delta t}{2r_n \Delta r} &= a_n; \\ \frac{gA \Delta t}{\gamma \Delta r^2} &= b, \end{aligned} \right\} \quad (12.51)$$

то приходим к формуле

$$s_{k+1, n} = (1 - 2b) s_{k, n} + (a_n + b) s_{k, n+1} + (b - a_n) s_{k, n-1}. \quad (12.52)$$

Для упрощения расчетной зависимости подчиним соотношение между постоянными величинами Δr и Δt условию $b = \frac{1}{2}$, откуда

$$\Delta t = \frac{\gamma \Delta r^2}{2gA}. \quad (12.53)$$

Вместе с тем имеем равенство $1 - 2b = 0$, поэтому расчетная формула приобретает вид

$$s_{k+1, n} = \left(\frac{1}{2} + a_n\right)s_{k, n+1} + \left(\frac{1}{2} - a_n\right)s_{k, n-1}. \quad (12.54)$$

Радиус каждого отсека можно выразить через приращение Δr , т. е. написать

$$r_n = (n - 1)\Delta r.$$

Теперь нетрудно вывести следующую формулу для изменяющейся вдоль r величины a_n

$$a_n = \left(1 - \frac{\gamma Q_{\text{ст}}}{g \varphi H A}\right) \frac{1}{4(n-1)}. \quad (12.55)$$

Приступая к расчету, вычисляют коэффициент турбулентного обмена A и затем подбирают оптимальное значение Δr , которое, с одной стороны, позволяет получить необходимые значения интервалов времени Δt , а с другой — дает достаточную детализацию распределения s по радиусу и в то же время не приводит к излишней громоздкости расчета. При подборе этих величин одновременно следует вычислить a_n и делать пробные расчеты по формуле (12.54), чтобы убедиться в сходимости расчета при избранном значении Δr .

В начале расчета в 3—4 клетки, примыкающие к центру, вписываем начальное значение концентрации, отвечающее концентрации сточных вод. Время наполнения сточными водами соответствующей части круга в зоне загрязнения (указанных 3—4 клеток) учитывается и затем приплюсовывается к значениям t , отвечающим расчетным интервалам (находимым по сумме Δt).

В дальнейшем в расчете по формуле (12.54) используются экстраполяционные значения s (т. е. $s_{\text{экстр., 0}}$), помещаемые в расчетную таблицу левее точки $r=0$. Величина $s_{\text{экстр., 0}}$ принимается равной начальной концентрации выпускаемых в водоем сточных вод.

Коэффициент турбулентного обмена вычисляется по формуле

$$A = \frac{\gamma H v_{\text{ср}}}{MC},$$

причем, скорость берется как средняя по данным измерений за весь расчетный период времени, соответствующий весьма слабым неустойчивым течениям. При отсутствии таких данных значение $v_{\text{ср}}$ условно берется равным некоторой малой величине. В последнем случае расчет диффузии надо сделать в нескольких вариантах с использованием различных значений скорости.

Для условий ледостава в формулу коэффициента турбулентного обмена вместо глубины подставляется гидравлический радиус R , равный в этом случае половине глубины H , т. е.

$$R_3 = \frac{1}{2} H.$$

В результате расчета, выполненного изложенным выше методом, получают изменение во времени распределения концентрации s по радиусу зоны загрязнения, при этом по всем радиусам распределение s оказывается одинаковым. Рассмотренный метод расчета позволяет учесть и изменение начальной концентрации во времени. Это делается введением значения $s_{\text{экстр., 0}}$, равного начальной концентрации для рассматриваемого расчетного интервала Δt_k .

Если в какой-то момент времени в зоне загрязнения возникло устойчивое течение, благодаря которому облако загрязнения начинает перемещаться и теряет связь с источником загрязнения, то может быть сделан специальный расчет, позволяющий приближенно проследить дальнейший процесс диффузии и с учетом перемещения облака загрязнения. Такой расчет может быть выполнен по изложенной выше схеме в предположении неизменности формы облака при его перемещении и соответственно сохранении максимальной концентрации в центре координат. Координатная система считается перемещающейся вместе с облаком со средней скоростью течения, возникшей в рассматриваемой части озера (или водохранилища).

Расчет, как сказано, выполняется по той же схеме, которая рассмотрена выше с использованием формулы (12.54), причем учитывается, что $Q_{\text{ст}} = 0$. Поэтому a_n вычисляется по соотношению

$$a_n = \frac{1}{4(n-1)}. \quad (12.56)$$

Коэффициент турбулентного обмена вычисляется при использовании новой величины скорости течения.

Экстраполяционные значения концентрации $s_{\text{экстр., 0}}$ для расчетных интервалов принимаются разными, они находятся из равенства

$$s_{k, \text{экстр., 0}} = s_{k, 1}, \quad (12.57)$$

где $s_{k, 1}$ — концентрация в первом (считая от центра) расчетном отсеке, полученная по расчету для предыдущего интервала времени.

Перемещение δx облака загрязнения в водоеме за один расчетный интервал вычисляется по формуле

$$\delta x = v_{\text{cp}} \Delta t. \quad (12.58)$$

Суммируя отрезки δx , получаем путь перемещения облака загрязнения и распределение концентраций в этом облаке для каждого расчетного интервала, отвечающего определенному положению облака в водоеме.

§ 7. Расчет турбулентной теплопроводности

Рассмотрим простейшую задачу об установившемся процессе охлаждения или нагревания с поверхности или от дна равномерного установившегося турбулентного потока. Применительно к этому случаю уравнение турбулентной теплопроводности оказывается значительно более простым, чем в общем случае. Исключение же из рассмотрения сильно извилистых потоков с развитыми поперечными течениями, характеризующимися скоростями v_x и v_y , позволяет в порядке первого приближения пренебречь указанными величинами. Таким образом, задача сводится к плоской, определяемой следующим приближенным уравнением:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{g A_{\text{ср}}}{\gamma v_{\text{ср}}} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (12.59)$$

в котором в порядке дальнейшего упрощения местная скорость v и местное значение коэффициента турбулентного обмена A заменены их средними значениями по вертикали $v_{\text{ср}}$ и $A_{\text{ср}}$.

Решение уравнения (12.59) может быть выполнено тем же методом, который подробно рассмотрен в параграфе, посвященном установившейся турбулентной диффузии. Используя те же обозначения при разбивке продольного сечения потока на расчетные клетки $\Delta x \Delta y$, можем записать дифференциальное уравнение турбулентной теплопроводности таким образом:

$$\theta_{k+1, n} = \frac{1}{2} (\theta_{k, n+1} + \theta_{k, n-1}), \quad (12.60)$$

при условии, что

$$\frac{g A_{\text{ср}} \Delta x}{\gamma v_{\text{ср}} \Delta y^2} = \frac{1}{2}.$$

Вводя в это выражение значение $A_{\text{ср}}$, а затем подставляя безразмерную величину N , получаем

$$\Delta x = \frac{MC}{g} \cdot \frac{\Delta y^2}{2H_{\text{ср}}} = N \frac{\Delta y^2}{2H_{\text{ср}}}.$$

Если поток покрыт льдом, то вместо $H_{\text{ср}}$ в формулу подставляют R .

Учет краевых условий осуществляется, как и при решении задач о турбулентной диффузии, путем введения экстраполяционных значений температуры. Если, например, тепловой поток через

свободную поверхность задан величиной $q_{\theta \text{ пов}}$, то экстраполяционное значение находится из соотношения

$$\frac{\theta_1 - \theta_{\text{экстр. пов}}}{\Delta y} = - \frac{q_{\theta \text{ пов}}}{g\sigma A_{\text{ср}}}$$

(где σ — теплоемкость воды), преобразуемого к виду

$$\theta_{\text{экстр. пов}} = \theta_1 + \frac{q_{\theta \text{ пов}} \Delta y}{g\sigma A_{\text{ср}}}. \quad (12.61)$$

Тепловой поток выражает секундный расход тепла через единицу поверхности в $\text{ккал}/\text{м}^2 \text{сек}$. Значение $q_{\theta \text{ пов}}$ устанавливается на основании специальных натуральных или экспериментальных исследований, при этом учитывается поступление тепла за счет радиации и непосредственного контакта с воздушными массами, а также потери тепла за счет отражения, испарения и т. д.

Для экстраполяции за линию дна будем иметь

$$\theta_{\text{экстр. дно}} = \theta_D + \frac{q_{\theta \text{ дно}} \Delta y}{g\sigma A_{\text{ср}}}. \quad (12.62)$$

В формулах (12.61) и (12.62) θ_1 — температура в клетке, расположенной непосредственно под поверхностью воды, θ_D — температура в клетке у самого дна; $q_{\theta \text{ дно}}$ находится на основании натуральных исследований.

Экстраполяционное значение температуры может быть вычислено и на основании величин коэффициентов теплопередачи α через поверхность, ограничивающую поток. Например, при задании коэффициента теплопередачи $\alpha_{\text{пов}}$ от воды к нижней поверхности льда, имеющей температуру 0° , т. е. при $\theta_{\text{внешн}} = 0$, получаем

$$\theta_{\text{экстр. пов}} = \frac{2g\sigma A_{\text{ср}} - \alpha \Delta y}{2g\sigma A_{\text{ср}} + \alpha \Delta y} \theta_1; \quad (12.63)$$

заметим, что при выводе этой формулы принято

$$\theta_{\text{гр}} \cong \frac{\theta_1 + \theta_{\text{экстр. пов}}}{2}.$$

Для экстраполяции за линию дна имеем

$$\theta_{\text{экстр. дно}} = \frac{2g\sigma A_{\text{ср}} - \alpha \Delta y}{2g\sigma A_{\text{ср}} + \alpha \Delta y} \theta_D + \frac{2\alpha \Delta y}{2g\sigma A_{\text{ср}} + \alpha \Delta y} \theta_{\text{внешн}}. \quad (12.64)$$

Напомним, что при выводе формул экстраполяции мы принимали тепловые потоки, направленные вверх через нижнюю поверхность и вниз через верхнюю поверхность потока, что имеет место при нагревании, положительными, а потоки обратного направления (при охлаждении водных масс) — отрицательными.

Коэффициент теплопередачи α находится на основании специальных измерений при использовании формулы

$$q_{\theta \text{ гр}} = -\alpha(\theta_{\text{гр}} - \theta_{\text{внешн}}), \quad (12.65)$$

где $q_{\theta \text{ гр}}$ — секундный расход тепла через единицу граничной поверхности потока, выражаемый в *ккал/м²сек.* Через $\theta_{\text{гр}}$ обозначена температура воды в потоке в непосредственной близости от стенки или водной поверхности. Величина $\theta_{\text{внешн}}$ выражает температуру стенки или воздуха у поверхности потока и является внешней для потока характеристикой. Формула (12.65) показывает, что расход тепла через граничную поверхность потока пропорционален перепаду температуры $\theta_{\text{гр}} - \theta_{\text{внешн}}$ на указанной поверхности. Коэффициент теплопередачи выражается в *ккал/м²сек град.*

Глава XIII

ВЗВЕШИВАНИЕ И ТРАНСПОРТИРОВАНИЕ НАНОСОВ

§ 1. Общие сведения о речных наносах

Наносами называются твердые частицы различного размера, переносимые водными потоками — ручьями, реками, течениями в водохранилищах, озерах и морях и являющиеся продуктами разрушения горных пород, почв и продуктами органического происхождения. Главную массу речных наносов и наносов береговых зон озер и морей составляют минеральные частицы.

В ручьи и реки твердый материал поступает вместе с водой непосредственно с поверхности их водосборных бассейнов, а также в результате размыва берегов и дна русел и пойм. Долины и русла водотоков являются продуктом водной эрозии, которая и в настоящее время проявляется здесь, как правило, весьма интенсивно. Дно речных долин складывается из переработанных рекой наносов, формирующих здесь аккумулятивные образования — террасы и поймы, а непосредственно в русле — побочни, перекаты, осередки, донные гряды (рис. 13.1) и т. д. Динамическое воздействие потока и транспорт наносов обуславливают подвижность указанных русловых образований. Перемещение русловых образований и их трансформация приводят к изменениям очертаний речного русла. Наиболее мощная аккумуляция речных наносов имеет место в устьях рек, где образуются дельты, бары и т. д., а также в предгорьях, где за счет выноса наносов с гор формируются аллювиальные равнины.

Перемещение наносов в естественных потоках имеет прерывистый характер: частицы временами выпадают на дно русла или

осаждаются на поймах, а затем вновь приходят в движение, взвешиваются или перекатываются и переносятся дальше. Процесс постоянно наблюдающегося взвешивания, передвижения и осаждения наносов определяет деформацию русла. В гидрологии отмечается, что русловые процессы определяются взаимодей-



Рис. 13.1. Песчаные гряды на дне р. Полометь.

Снизу крупные гряды на глубоком месте, в верхней части фотографии — отмель с мелкими рифелями.

ствием потока и русла. Главным содержанием этого взаимодействия является взаимообмен наносами русла и потока, т. е. взмыв и осаждение наносов. Одной стороной взаимодействия является динамика транспорта взвешенных и влекомых наносов, другой — динамика русла и поймы.

Уточним понятия «взвешенные» и «влекомые» наносы. Взвешенными называют наносы, переносимые во всей толще потока, где они поддерживаются во взвешенном состоянии восходящими

вихревыми (пульсационными) токами. Внутри пульсационных индивидуумов взвешенные частицы перемещаются вниз со скоростью u , отвечающей их гидравлической крупности, а в продольном направлении они совершают перемещения со скоростью, равной продольной составляющей скорости пульсационных индивидуумов. Все это в полной мере согласуется с теми положениями, которые рассмотрены при выводе уравнения турбулентного переноса взвешенных веществ и общего дифференциального уравнения турбулентной диффузии в главе IV настоящей книги.

Влекомыми наносами следует называть те частицы, которые перемещаются лишь в придонном слое потока. Крупность их значительна, и восходящие вихревые токи не в состоянии увлечь их в толщу потока. Основными видами движения влекомых наносов являются: скольжение, перекачивание и сальтация — так называют перескакивание частиц в придонном слое. Сальтация является переходным состоянием между взвешиванием и влечением наносов, однако большинство исследователей относят сальтирующие наносы к категории влекомых, хотя, по существу, они ближе к взвешенным, так как скачок частицы осуществляется преимущественно под влиянием восходящих вихрей, которые настолько «обезвешивают» частицу, что она свободно перебрасывается продольным течением и таким образом совершает скачок.

Из сказанного видно, что во взвешенном состоянии переносятся более мелкие частицы наносов, а во влекомом состоянии — более крупные. Но какой-либо определенной границы крупности между рассматриваемыми категориями наносов провести нельзя. Это объясняется тем, что в связи с пульсацией скоростей в турбулентном потоке условия взмучивания и донного влечения непрерывно меняются, а поэтому в составе взвешенных наносов мы будем находить наряду с мелкими наносами и более крупные, которым в большей мере свойственно донное влечение. В составе влекомых наносов встречается значительное количество мелких частиц, характерных для взвешенных наносов. С другой стороны, гидравлика потока (глубина, скорость течения, уклон и т. д.) изменяется как вдоль русла, так и по его ширине и во времени. В соответствии с этим условия взвешивания и влечения наносов изменяются от вертикали к вертикали, а также и во времени.

Наносы, находящиеся на дне потока и образующие верхнее покрытие русла, называют донными наносами или донными отложениями. Некоторые авторы вместо термина влекомые наносы употребляют термин донные наносы. Для большей четкости изложения под донными наносами ниже будут подразумеваться только те, которые формируют верхний покров речного русла, включая и пойму. Нельзя смешивать понятия донные наносы и речной аллювий; последнее является более широким, так как

охватывает все отложения наносов, включая и те, которые находятся на значительной глубине и в современных условиях утратили связь с речным потоком.

Для характеристики состава наносов используются данные о геометрических размерах и о гидравлической крупности частиц наносов. Основным показателем геометрического размера частицы является ее средний линейный размер, отвечающий диаметру равновеликого шара. Этот размер именуют диаметром частицы и обозначают через d .

Для характеристики совокупности переносимых потоком или находящихся на дне частиц наносов пользуются так называемыми гранулометрическими кривыми или таблицами, в которых показывается процентное содержание частиц определенного размера в общей смеси наносов. Гранулометрический состав взвешенных, влекомых и донных наносов определяется в лабораториях. Частицы наносов, попадающие при анализе в определенные, заранее заданные интервалы крупности Δd , образуют совокупности, называемые фракциями; поэтому иногда говорят о фракционном составе наносов, имея в виду их гранулометрический состав.

Для характеристики однородных наносов или грунтов, а также отдельных фракций по размерам используется приведенная в табл. 13.1 классификация частиц. При описании неоднородных донных отложений может применяться классификация, предложенная Г. А. Петуховой (табл. 13.2). По данным гранулометрического анализа грунтов устанавливается состав отдельных фракций в процентах и выясняется по табл. 13.2 тип грунта, а затем путем визуального сравнения проанализированных грунтов с грунтами, встречающимися при обследовании, устанавливаются типы последних. Таблица позволяет при этом получить приближенно гранулометрический состав визуально обследованных грунтов.

Таблица 13.1

Классификация наносов (средний диаметр в мм)

Подразделение	Валуны	Галька	Гравий	Песок
Крупные	1000—500	100—50	10—5	1 —0,5
Средние	500—200	50—20	5—2	0,5—0,2
Мелкие	200—100	20—10	2—1	0,2—0,1

Подразделение	Пыль	Ил	Глина
Крупные	0,1—0,05	0,01—0,005	<0,001
Средние	—	—	—
Мелкие	0,05—0,01	0,005—0,001	—

Таблица 13.2

Объемные веса донных отложений в зависимости от их гранулометрического состава

Название грунта	Наименование фракций, диаметр частиц (мм) и пределы их содержания в % по весу													γ т/м ³	
	галька			гравий			песок			пыль		ил			глина
	100—50	50—20	20—10	10—5	5—2	2—1	1—0,5	0,5—0,2	0,2—0,1	0,1—0,05	0,05—0,01	0,01—0,005	0,005—0,001		<0,001
Илы тонкие												10—20	40—70	10—20	0,7—0,8
Илы												20—40	40—70		0,8—0,9
Илы с примесью песка									10—20			40—70	10—20		0,9—1,1
Мелкие пески заиленные									40—70				10—20		1,1—1,2
Мелкие и средние пески заиленные								20—40	40—70			10—20			1,2—1,3
Средние пески заиленные								40—70			20—40	10—20			1,3—1,5
Мелкие пески								10—20	40—70			20—40			1,5—1,6
Средние пески								40—70	20—40	10—20					1,6—1,7
Средние и крупные пески								40—70		20—40					1,6—1,8
Пески с гравием					20—40			40—70							1,7—1,8
Гравий			10—20		40—70		10—20								1,8—2,1
Галька с гравием	40—70				20—40										2,0—2,4

Примечание. 1. В таблице предполагается, что достигнуто достаточное уплотнение грунта, отвечающее нескольким годам эксплуатации водоема.

2. В таблице не учитывается содержание органических веществ. Известно, что с увеличением содержания органических примесей объемный вес донных отложений уменьшается. Например, объемный вес отложений прудов южной части Украины при 5%-ном содержании органических остатков уменьшается на 20—30%, при 10%-ном — на 30—50%. Это соотношение следует принимать во внимание при оценке объемных весов грунтов, содержащих очень большое количество органических остатков.

Существенное значение при решении многих практических задач имеет объемный вес грунта γ_r , выражаемый в $г/см^3$, $кг/м^3$ или $т/м^3$. При измерении γ_r определяется объем пробы грунта в естественном состоянии. Очевидно, что численные значения γ_r в $г/см^3$ и γ_r в $т/м^3$ совпадают, а γ_r в $кг/м^3$ отличается от них в тысячу раз. Ориентировочные значения γ_r для разных достаточно уплотненных (слежавшихся) грунтов приведены в последней графе табл. 13.2.

Гидрология располагает методами, позволяющими производить измерения расходов взвешенных и влекомых наносов. Данные таких единичных измерений обобщаются и на их основании вычисляется сток наносов за тот или иной промежуток времени. Наиболее полно в настоящее время в гидрологии анализируется годовой сток взвешенных наносов.

Величина стока наносов зависит: 1) от строения гидрографической сети, уклонов русел ручьев и рек, состава покрывающих их наносов, 2) от величины стока воды и степени его изменчивости во времени, 3) от строения и состава почв и грунтов, слагающих поверхность бассейна, от их защищенности растительным покровом, увлажненности и относительной площади распаханых земель и т. д., 4) от рельефа водосборного бассейна, в первую очередь от крутизны склонов бассейна, степени его расчлененности.

Очень велика, как правило, изменчивость стока наносов. Решающим фактором формирования стока наносов и определяющим его изменчивость на крупных реках является величина и режим стока воды, в частности, характер развития паводка, степень затопления поймы, относительная высота пика паводка и т. д. Основными факторами формирования и изменчивости стока наносов малых рек являются условия на их водосборных бассейнах: увлажненность почво-грунтов, степень их оттаивания к началу половодья и т. д.

Исключительно большие различия в величинах расходов наносов наблюдаются внутри года — очень высокие расходы в паводок и очень малые в период межени. На малых реках и ручьях рекоз выражается и суточный ход расходов наносов.

Интенсивность сезонных колебаний стока наносов и изменчивость его годовых величин особенно велики в условиях засушливых и отчасти горных районов. В горных районах могут быть катастрофические случаи выноса наносов селями. Сель — это кратковременный паводок с очень высоким содержанием наносов (до 50—60% общего объема), имеющий большую разрушительную силу. Селевые потоки возникают в результате ливней или весьма интенсивного таяния снега в бассейнах горных рек, имеющих уклон, превышающий 0,1, и характеризующихся наличием скоплений рыхлого материала.

Равнинные реки транспортируют преимущественно взвешенные наносы. Доля влекомых наносов в их общем стоке невелика. Обычно применяемая на реках методика измерения стока взвешенных наносов в условиях русла, сложенного мелким аллювием (не крупнее песка), позволяет учитывать в основном все транспортируемые потоком фракции наносов. Потоками с большим уклоном крупные фракции транспортируются в относительно большем количестве, возрастает транспорт собственно влекомых наносов.

Величины стока взвешенных наносов широко используются в гидравлических расчетах, например, при определении заиления водохранилищ, расчете деформации речных русел, получении характеристик качества воды для водоснабжения и т. д. Для рек, по которым проводятся систематические измерения стока наносов Гидрометслужбой СССР, необходимые данные публикуются в Гидрологических ежегодниках и в обобщающих изданиях Гидрометслужбы, выпускаемых по определенным районам СССР.

При установлении среднего многолетнего значения стока наносов часто используются коррелятивные связи стока наносов со стоком воды. Последние позволяют, в частности, восполнить пробелы в измерениях стока наносов или удлинить ряды значений годового стока наносов на тот период, когда измерялся лишь сток воды. Методы такого рода расчетов детально рассматриваются в специальной гидрологической литературе.

При отсутствии данных измерений стока взвешенных наносов для той или иной реки ее средняя многолетняя мутность может быть приближенно установлена по карте мутности рек. Для всей территории СССР карты мутности больших и средних рек опубликованы Г. И. Шамовым (рис. 13.2) и Г. В. Лопатиным. Региональные уточненные карты мутности составлены для отдельных частей территории нашей страны. Средний многолетний расход наносов реки вычисляется путем умножения средней мутности на средний многолетний расход воды.

Для некоторых областей СССР составлены карты эрозионных коэффициентов, позволяющие получать более надежные значения стока наносов неизученных рек, чем это возможно по картам мутности. Для рек Северного Казахстана К. Н. Лисицина предложила такую зависимость:

$$M_R = A_9 i 10^3, \quad (13.1)$$

где M_R — модуль стока взвешенных наносов (последние преобладают здесь в общем стоке наносов), i — средний (по длине реки) продольный уклон русла, A_9 — эрозионный коэффициент. Физический смысл M_R ясен непосредственно из размерности этой величины: $t/км^2$ в год. Значения эрозионного коэффициента для указанной территории картированы Лисиценой. Он изменяется в пределах от 1 до 16. Годовой сток наносов находится

умножением вычисленного по формуле (13.1) модуля M_R на площадь водосборного бассейна рассматриваемой реки.

Карты мутности построены для рек с водосбором более 200 км². Однако замечено, что мутность малых рек больше и имеется тенденция к ее возрастанию с уменьшением площади водосбора. Гидрологические исследования позволили установить грубо ориентировочные переходные коэффициенты $k_{п}$ от фоновой мутности рассматриваемой зоны S_3 по карте (мутности больших рек) к мутности малых водотоков S_M . Последняя находится по формуле

$$S_M = k_{п} S_3. \quad (13.2)$$

Ниже приводится таблица значений $k_{п}$, составленная для водотоков ЦЧО, Украины и Северного Казахстана (табл. 13.3). Для других территорий данные о $k_{п}$ отсутствуют, поэтому вычисления могут иметь характер лишь предварительных прикидок и основываться на аналогиях с изученными в этом отношении территориями или реками.

Таблица 13.3

Поправочные коэффициенты $k_{п}$ к мутности рек, определяемой по карте

Площадь водосбора, км ²	Территория		
	Центральные черноземные области (данные К. П. Воскресенского)	Украина (данные Н. И. Дрозда)	Северный Казахстан (данные К. Н. Лисициной)
< 2	30	30	40
5	15	15	20
10	10	10	13
50	5	5	5
100	3	—	3
200	1	—	1
≥ 1000	1	1	1

При любых расчетах транспорта наносов, деформации русла или заиления водохранилищ необходимы данные о гранулометрическом составе наносов. Эти данные могут быть получены из материалов непосредственных измерений. При отсутствии таких данных для предварительных прикидок используются материалы по рекам-аналогам, хотя такой путь является малонадежным.

§ 2. Падение частиц в воде, гидравлическая крупность

Твердая частица, имеющая удельный вес, превышающий удельный вес воды, опущенная в неподвижную воду, начинает падать. Скорость ее падения возрастает от нуля в начальный мо-

мент до некоторого предела, после чего сохраняется неизменной, т. е. падение становится равномерным. Эту скорость равномерного падения частиц в неподвижной воде называют гидравлической крупностью и обозначают u .

Чем мельче частицы и чем менее плотный материал их образует, тем медленнее они падают в воде. Чем крупнее и относительно тяжелее частицы, тем быстрее они падают, т. е. тем больше их гидравлическая крупность. Участок разгона оказывается очень малым для мелких частиц, которые преимущественно и переносятся потоками во взвешенном состоянии. При увеличении массы частицы длина участка разгона возрастает.

Гидрологов в основном интересует скорость равномерного падения частиц, т. е. u . Участок ускоренного движения частицы (ее разгона) рассматривается только в особых задачах, относящихся к наиболее крупным из транспортируемых реками наносам.

Мелкие частицы осаждаются медленно, в неподвижной воде они падают практически по прямой линии. Такой режим падения частиц В. Н. Гончаров назвал ламинарным. Речные наносы, имеющие обычный минеральный состав, характеризуются ламинарным режимом падения в том случае, если их диаметр $d \leq 0,15$ мм.

Крупные частицы речных наносов, отличаясь значительно большими скоростями падения в воде, имеют извилистые, иногда винтообразные траектории. В процессе падения они часто приобретают колебательные движения и нередко вращаются. Такой режим падения частиц Гончаров назвал турбулентным, он характерен для частиц наносов с диаметром $d \geq 1,5$ мм.

Отличают еще и переходный режим, при котором частицы опускаются по слабо искривленным траекториям, испытывая относительно небольшие колебания. К таким частицам относятся зерна наносов с диаметром, находящимся в пределах $0,15$ мм $< d < 1,5$ мм.

Рассмотрим ламинарный режим падения частиц в неподвижной воде. Формулу для этого случая получил Стокс, поэтому ламинарную область падения частиц иногда называют областью Стокса.

Изучение разгона частиц в ламинарной области в гидрологии не имеет смысла, так как, согласно вышесказанному, путь разгона мелких частиц очень мал и измеряется миллиметрами. Поэтому остановимся непосредственно на равномерном падении частиц, при котором уравниваются две силы, действующие на частицу, — сила тяжести F_T и сила гидродинамического сопротивления F_C , т. е.

$$F_T = F_C. \quad (13.3)$$

Выражение силы тяжести, действующей на погруженную в воду частицу, находится по формуле

$$F_T = k_1 (\gamma_s - \gamma) d^3. \quad (13.4)$$

Здесь $(\gamma_s - \gamma)$ — разность удельных весов частицы и воды, d — средний линейный размер (диаметр) частицы, k_1 — коэффициент, учитывающий форму частицы. Для шара $k_1 = \frac{\pi}{6}$, для куба $k_1 = 1$, для частиц естественных наносов, имеющих различные формы, величины k_1 различны, но, как правило, заключены в довольно узких пределах.

При падении частица увлекает за собой некоторый объем жидкости. При ламинарном осаждении этот объем обволакивает частицу со всех сторон и по своему размеру он соизмерим с размером частицы. Молекулы воды, соприкасающиеся с частицей, перемещаются со скоростью частицы. Молекулы, находящиеся на некотором расстоянии от частицы, но внутри обволакивающего объема жидкости, имеют меньшую скорость опускания, а на границе этого объема жидкость оказывается неподвижной. Чтобы получить силу сопротивления F_c , достаточно определить сопротивление внутри жидкой оболочки, обволакивающей частицу при ее падении. Нетрудно видеть, что F_c определяется следующим приближенным выражением:

$$F_c = k_2 \mu \frac{u}{\Delta} d^2, \quad (13.5)$$

где μ — коэффициент молекулярной вязкости воды, d — диаметр частицы, k_2 — коэффициент пропорциональности, учитывающий одновременно и форму частицы, Δ — средняя толщина оболочки. В приведенной зависимости u выражает разность скорости опускания жидкости на внутренней границе оболочки (где эта скорость равна u) и на внешней ее границе (где скорость равна 0).

Частное $\frac{u}{\Delta}$ выражает средний градиент скорости внутри обволакивающей частицу жидкой оболочки, а произведение $\mu \frac{u}{\Delta}$ —

силу внутреннего трения, приходящуюся на единицу поверхности трения. Поверхностью трения назовем поверхность, заключенную внутри обволакивающего объема и проходящую через точки, в которых скорость близка к $\frac{1}{2} u$. Поверхность трения в таком предположении должна быть пропорциональна d^2 .

Далее можно принять, что чем больше частица, имеющая ламинарный режим осаждения, тем больше толщина Δ обволакивающего слоя, т. е.

$$\Delta = k_3 d,$$

k_3 — коэффициент пропорциональности. Подставляя это равенство в формулу (13.5) и вводя обобщающий коэффициент k_0 , получаем

$$F_c = k_0 \mu u d. \quad (13.6)$$

Приравнявая обе действующие на частицу силы, записываем

$$k_1 (\gamma_s - \gamma) d^3 = k_0 \mu u d.$$

Вводя новый размерный коэффициент пропорциональности для ламинарной области k_n , т. е. полагая

$$k_n = \frac{k_1}{k_0} \gamma,$$

записываем окончательно следующую формулу гидравлической крупности для наносов с диаметром $d < 0,15$ мм:

$$u = k_n \frac{(\gamma_s - \gamma) d^2}{\gamma \mu}. \quad (13.7)$$

В. Н. Гончаров, изучавший гидравлическую крупность частиц, экспериментально нашел численное значение коэффициента k_n , именно он получил $k_n = 40,6$ для случая, если скорость u выражается в см/сек.

Перейдем к турбулентной области падения частиц. Следуя разработкам В. В. Романовского, составим общее уравнение неравномерного падения частицы в неподвижной воде. Применяя закон живой силы, пишем

$$d \left(\frac{M u_y^2}{2} \right) = (F_T - F_c) dy. \quad (13.8)$$

Ось y направлена вертикально вниз и совпадает с осредненным направлением падения частицы. Ниже будем изучать только вертикальную составляющую турбулентного падения частицы u_y . Здесь, как и выше, F_T и F_c — действующие на частицу силы тяжести и сопротивления, M — масса частицы. Правая часть уравнения представляет собой дифференциал работы равнодействующей приложенных к частице сил, левая — дифференциал живой силы частицы.

Сила тяжести, действующая на частицу, погруженную в воду, определяется равенством

$$F_T = V (\gamma_s - \gamma),$$

где V — объем частицы.

При турбулентном падении частицы сила гидродинамического сопротивления пропорциональна квадрату скорости u_y и площади наибольшего поперечного сечения частицы Ω .

Соппротивление будем считать функцией живой силы частицы, т. е. напишем:

$$F_c = c\gamma\Omega \frac{u_y^2}{2g}. \quad (13.9)$$

Здесь c — коэффициент пропорциональности, именуемый ниже коэффициентом сопротивления.

Подставляя значения F_T и F_c в уравнение (13.8), учитывая, что $M = \frac{\gamma_s}{g} V$, производя преобразования и разделяя переменные, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{V\gamma_s d(u_y^2)}{c\Omega\gamma \left[\frac{V(\gamma_s - \gamma)2g}{c\Omega\gamma} - u_y^2 \right]} = dy.$$

Вводя обозначения

$$u_y^2 = \varphi;$$

$$\frac{V(\gamma_s - \gamma)2g}{c\Omega\gamma} = a;$$

$$\frac{V\gamma_s}{c\Omega\gamma} = a_1,$$

приходим к следующей записи уравнения:

$$a_1 \frac{d\varphi}{a - \varphi} = dy. \quad (13.10)$$

Интегрирование приводит к выражению

$$-a_1 \ln |\varphi - a| = \varphi + c_1,$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

Рассматривая ускоренное и равномерное движение, замечаем, что в этом случае имеет место условие $F_T \geq F_c$, откуда вытекает, что $a \geq \varphi$, поэтому абсолютная величина разности $|\varphi - a|$, являющейся положительной, может быть представлена так: $a - \varphi$. Это позволяет написать

$$-a_1 \ln (a - \varphi) = \varphi + c_1. \quad (13.11)$$

Определим постоянную c_1 . При $y=0$ $\varphi=0$, следовательно

$$c_1 = a_1 \ln a.$$

Учитывая это равенство и преобразуя уравнение (13.11), находим

$$\frac{a}{a - \varphi} = e^{\frac{\varphi}{a_1}}.$$

Подставляя сюда значения a , a_1 и φ , получаем

$$u_y = \sqrt{\frac{2gV(\gamma_s - \gamma)}{c\Omega\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c\Omega\gamma y}{\gamma_s V}}\right)}. \quad (13.12)$$

Полагая, что объем V и площадь наибольшего сечения частицы Ω определяются равенствами

$$V = \beta_1 d^3 \quad \text{и} \quad \Omega = \beta_2 d^2,$$

приходим к такой записи уравнения:

$$u_y = k_T \sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c_* \gamma y}{\gamma_s d}}\right)}, \quad (13.13)$$

где

$$c_* = \frac{c\beta_2}{\beta_1} \quad \text{и} \quad k_T = \sqrt{\frac{2g}{c_*}}.$$

Выражение гидравлической крупности находим непосредственно из уравнения (13.13), полагая в нем $y = \infty$,

$$u = k_T \sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\gamma}}. \quad (13.14)$$

Получили формулу для турбулентного режима осаждения частиц, соответствующую формуле, предложенной ранее В. Н. Гончаровым, который экспериментально установил и величину коэффициента k_T . По данным Гончарова, если выразить u в см/сек, то $k_T = 33,1$.

Вернемся к уравнению В. В. Романовского, записанному выше под номером (13.12). Это уравнение может применяться для расчета скорости падения частицы наносов, для определения пути разгона частицы, времени разгона и т. д.

Экспериментальные исследования Романовского, выполненные им в большом наполненном водой фракциометре высотой 2,5 м с квадратным поперечным сечением $0,25 \times 0,25$ м², позволили определить зависимость коэффициента сопротивления c от формы частицы. Было изучено падение частиц со средним размером от 10 до 80 мкм, имевших разную форму (рис. 13.3). Выяснилось, что коэффициент сопротивления c может быть связан следующей зависимостью с некоторой величиной Θ , именуемой параметром формы частицы,

$$c = 0,65\Theta^{-1,18}. \quad (13.15)$$

Параметр формы частицы Θ выражается соотношением

$$\Theta = \frac{2V^{2/3}}{lb}, \quad (13.16)$$

где V — объем частицы наносов, l — ее наибольший линейный размер или иначе — длина наибольшего сечения частицы, b — ширина наибольшего сечения частицы. Исследования Романовского показали, что во время падения в спокойной воде частица ориентируется таким образом, что ее наибольшее сечение оказывается перпендикулярным направлению падения. Такая ориентировка, однако, только в среднем характеризует положение частицы, которая, как отмечалось выше, в процессе падения испытывает

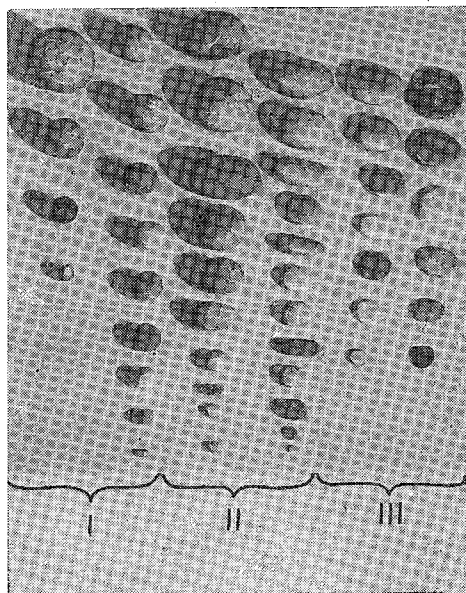


Рис. 13.3. Разделение частиц крупных наносов на группы в зависимости от параметра формы частиц θ .

Группа I — $1,27 > \theta > 1,00$; группа II — $1,00 > \theta > 0,75$; группа III — $0,75 > \theta$.

колебательные движения. Коэффициент сопротивления частицы s находится в прямой зависимости от площади ее наибольшего сечения, пропорциональной произведению lb .

Выражение гидравлической крупности частиц при турбулентном режиме падения, учитывающее их форму, выводится непосредственно из уравнения (13.12), в котором принимается $y = \infty$. Вводя вертикальный размер частицы, т. е. высоту h , полагая

$$\frac{V}{\Omega} = k_2 h$$

и учитывая, что в среднем $k_2 \cong 0,64$, записываем

$$u = \frac{1,13}{\sqrt{c}} \sqrt{\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} gh}. \quad (13.17)$$

Подставляя значение c по формуле (13.15), окончательно находим

$$u = 1,4\theta^{0,6} \sqrt{\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} gh}. \quad (13.18)$$

В этих формулах h , b и l выражены в $см$, g — в $см/сек^2$, u — в $см/сек$. Опытами В. В. Романовского установлено, что форма частиц влияет на их гидравлическую крупность практически лишь в области турбулентного осаждения, на осаждение мелких частиц влияния формы пока не обнаружено.

Для переходного режима осаждения В. Н. Гончаров получил следующую эмпирическую формулу:

$$u = \left[67,7d + 0,52 \left(\frac{\theta}{26} - 1 \right) \right] \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}, \quad (13.19)$$

где θ — температура воды в градусах Цельсия; очевидно, что через эту величину учитывается влияние вязкости воды на

Таблица 13.4

Значения гидравлической крупности частиц по опытным данным Б. В. Архангельского, А. П. Зегжды, Г. Н. Лапшина и В. В. Романовского

Диаметр частицы d мм	Гидравлическая крупность u ($м/сек$) при температуре			
	от 5 до 8°	от 9 до 12°	от 13 до 16°	от 17 до 20°

Ламинарная и переходная области

0,005	0,0000105	0,0000125	0,0000140	0,0000165
0,0075	0,0000237	0,0000277	0,0000316	0,0000362
0,010	0,0000420	0,0000490	0,0000560	0,0000630
0,015	0,0000960	0,000111	0,000128	0,000144
0,020	0,000167	0,000193	0,000222	0,000250
0,025	0,000265	0,000315	0,000363	0,000414
0,030	0,000400	0,000468	0,000536	0,000610
0,040	0,000716	0,000832	0,000946	0,00108
0,050	0,00107	0,00125	0,00141	0,00161
0,075	0,00250	0,00308	0,00350	0,00420
0,10	0,00410	0,00500	0,00575	0,00640
0,15	0,0078	0,0082	0,0105	0,0120
0,20	0,0131	0,0150	0,0175	0,0192
0,30	0,0250	0,0277	0,0317	0,0345
0,40	0,0370	0,0405	0,0445	0,0485
0,50	0,0480	0,0528	0,0568	0,0608
0,60	0,0598	0,0642	0,0682	0,072
0,70	0,0710	0,0755	0,0800	0,0840
0,80	0,0815	0,0862	0,0908	0,0954
0,90	0,0912	0,0963	0,1012	0,1063
1,00	0,100	0,106	0,111	0,117

Диаметр частицы <i>d</i> мм	Гидравлическая крупность <i>u</i> м/сек	Диаметр частицы <i>d</i> мм	Гидравлическая крупность <i>u</i> м/сек	Диаметр частицы <i>d</i> мм	Гидравлическая крупность <i>u</i> м/сек
-----------------------------------	---	-----------------------------------	---	-----------------------------------	---

Турбулентная область

1,2	0,126	4,0	0,269	10,0	0,42
1,4	0,144	4,5	0,284	15,0	0,52
1,6	0,160	5,0	0,294	20,0	0,63
2,0	0,184	6,0	0,323	30,0	0,78
2,5	0,210	7,0	0,347	40,0	0,92
3,0	0,234	8,0	0,370	60,0	1,17
3,5	0,254	9,0	0,393	80,0	1,39

сопротивление падению частицы. Скорость падения *u* выражена в см/сек, *d* — в см.

В практике расчетов обычно пользуются таблицей гидравлической крупности частиц, составленной по данным лабораторных опытов. Наиболее полная таблица гидравлической крупности составлена в Лаборатории наносов ГГИ по данным исследований В. В. Архангельского, А. П. Зегжды, Г. Н. Лапшина и В. В. Романовского (табл. 13.4).

Таблица 13.5

Значения гидравлической крупности частиц
при температуре воды +15°
(таблица, принятая в Гидрометслужбе)

<i>d</i> мм	<i>u</i> м/сек	<i>d</i> мм	<i>u</i> м/сек
0,001	0,0000008	0,1	0,008
0,005	0,00003	0,2	0,021
0,01	0,00008	0,5	0,060
0,05	0,002	1,0	0,100

Используемая в настоящее время в системе Гидрометслужбы таблица нуждается в уточнении. В Наставлении гидрометеорологическим станциям и постам, в. 6, ч. 1 помещена таблица гидравлической крупности для температуры воды +15°С (табл. 13.5), причем предусматривается введение поправок на температуру воды при выполнении лабораторного анализа наносов.

Следует учитывать, что при использовании данных гранулометрического анализа, опубликованных в изданиях Гидрометслужбы, переход от *d* к *u* следует выполнять по табл. 13.5 для мелких наносов ($d < 1$ мм), анализируемых гидравлическим ме-

тодом; гидравлическую крупность частиц $d > 1$ мм надо находить по табл. 13.4. Поправку на температуру при использовании табл. 13.5 следует вводить по данным табл. 13.6.

Таблица 13.6

Температурные поправочные коэффициенты
к гидравлической крупности, найденной по таблице 13.5
для температуры 15° С

d мм	0—4°	5—8°	9—12°	13—16°	17—20°
1,0	0,83	0,90	0,95	1	1,04
0,5	0,74	0,84	0,92	1	1,07
0,2	0,68	0,80	0,89	1	1,10
0,1	0,66	0,78	0,86	1	1,12
0,05	0,66	0,77	0,85	1	1,15
0,01	0,66	0,77	0,85	1	1,15
0,005	0,66	0,77	0,85	1	1,15

§ 3. Начальная скорость донного влечения, расход влеконых наносов

На дне речных потоков и ручьев находятся частицы донных наносов разного размера. Размер частицы, как указывалось выше, можно выражать ее средним линейным размером — средним диаметром d или при учете формы частицы тремя величинами l , b и h , характеризующими размеры в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В последующих рассуждениях будем предполагать, что донные отложения являются несвязными (как это чаще всего и бывает), т. е. состоят из рыхлого материала, легко распадающегося на отдельные зерна. При малых скоростях течения основная масса частиц будет неподвижной, перемещаться будут только самые мелкие частицы. При постепенном возрастании скорости потока будут приходить в движение все более и более крупные частицы активного слоя русла, а при очень большой скорости все частицы донных наносов могут оказаться перемещаемыми.

Скорость течения, при которой приходит в движение частица определенного размера, называется начальной скоростью влечения этой частицы. Начальную скорость будем обозначать через $v_{нач}$.

Для выяснения общего характера зависимости начальной скорости влечения от размеров частиц речных наносов рассмотрим наиболее простой случай, предполагающий, что по крайней мере в начальный момент перемещение частицы по дну имеет характер скольжения. Изучим начальную скорость влечения частицы, имеющей объем V . Пользуясь принятыми выше обозначениями

линейных размеров частицы, выразим следующим образом ее объем:

$$V = k_{\phi} l b h,$$

где k_{ϕ} — коэффициент формы частицы; для параллелепипеда он был бы равен единице, для шара, когда $l = b = h = d$, он оказался бы равным $\frac{\pi}{6}$.

Исследования И. В. Бурлая, Н. В. Разумихина и В. В. Романовского показывают, что на дне потока частицы располагаются таким образом, что плоскость их наибольшего сечения оказывается приблизительно параллельной общей поверхности дна, причем наибольшая ось частицы l к направлению течения располагается обычно под углом, близким к прямому. Лобовое воздействие потока будет осуществляться на сечение частицы площадью Ω_l . Это сечение перпендикулярно дну и направлению течения.

Очевидно

$$\Omega_l = k_l l h,$$

где k_l — коэффициент формы наибольшего вертикального сечения частицы, l — длина частицы, h — ее высота.

Активная сила лобового воздействия на частицу P_d выражается равенством

$$P_d = a_1 \frac{\gamma}{g} v_{\text{нач. дн}}^2 \Omega_l, \quad (13.20)$$

в котором a_1 — коэффициент пропорциональности, $v_{\text{нач. дн}}$ — начальная скорость влечения у дна на уровне, отвечающем центру тяжести сечения Ω_l . Подставляя значение Ω_l в формулу (13.20), пишем

$$P_d = a_1 k_l \frac{\gamma}{g} v_{\text{нач. дн}}^2 l h. \quad (13.21)$$

Противодействовать движению будет сила трения P_T частицы о поверхность дна. Эта сила пропорциональна силе тяжести P_g , прижимающей частицу к дну, т. е.

$$P_T = f P_g, \quad (13.22)$$

где f — коэффициент трения. Сила тяжести, действующая на частицу в воде (или ее вес в воде), определится равенством

$$P_g = (\gamma_s - \gamma) k_{\phi} l b h, \quad (13.23)$$

в котором, как и ранее, через γ_s и γ обозначены соответственно удельный вес частицы и удельный вес воды.

Предельному равновесию частицы или начальному моменту ее движения (троганию) отвечает равенство

$$P_d = P_T. \quad (13.24)$$

Подстановка сюда значений $P_{л}$, $P_{т}$ и P_{g} и замена всех коэффициентов обобщающим множителем

$$a_{вл}^2 = \frac{fk_{\Phi}}{a_1 k_l}$$

позволяет написать соотношение для начала влечения наносов следующим образом:

$$\frac{\gamma}{g} v_{нач. дн}^2 lh = a_{вл}^2 (\gamma_s - \gamma) lbh,$$

откуда окончательно находим

$$v_{нач. дн} = a_{вл} \sqrt{\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} gv}. \quad (13.25)$$

Полученный результат особенно интересен тем, что выясняет зависимость начальной скорости влечения частицы от ее линейного размера, измеряемого в направлении течения. Это согласуется, в частности, и с выводом В. В. Романовского, получившего зависимость гидравлической крупности частицы от вертикального ее размера h , т. е. размера, измеряемого в направлении ее движения при падении.

Донную начальную скорость влечения можно выразить через среднюю скорость потока. Эту среднюю скорость, отвечающую началу влечения частицы, также можно назвать начальной скоростью, но в этом случае формула начальной скорости будет содержать величины, учитывающие распределение скорости по вертикали: глубину потока, шероховатость русла и т. д. Следует иметь в виду, что форма частиц, учитываемая, в частности, коэффициентом $a_{вл}$, для разных наносов оказывается различной.

Для выражения начальной скорости влечения в настоящее время используются формулы, полученные без учета формы частиц. Некоторые из них выведены на основании весьма сложных выкладок, имеющих целью учесть значительное количество действующих факторов. Тем не менее все формулы такого рода являются приближенными, они содержат коэффициенты, определенные опытным путем, и их надежность и общность во многом зависят от полноты и надежности использованных экспериментальных или натуральных данных.

Предложенная Г. И. Шамовым формула начальной скорости движения частицы $v_{нач}$ (м/сек) имеет вид

$$v_{нач} = 4,4 d^{1/3} H^{1/6}, \quad (13.26)$$

где d — диаметр частицы (или средний диаметр фракции донных отложений), выраженный в м, H — средняя глубина потока в м.

Массовое движение частиц данного размера по указанию Шамова происходит при скорости $v_{нач. верх}$

$$v_{нач. верх} = 6,0 d^{1/3} H^{1/6}; \quad (13.27)$$

формула показывает ту минимальную скорость, при которой приходят в движение отдельные частицы рассматриваемой фракции, находящиеся на поверхности русла; частицы же, находящиеся в движении, прекращают свое движение, согласно исследованиям Шамова, при скорости потока, равной $v_{отл}$, причем

$$v_{отл} = 0,84v_{нач} = 3,7 d^{1/3} H^{1/6}. \quad (13.28)$$

Формула В. Н. Гончарова для начальной скорости имеет вид

$$v_{нач} = \sqrt{\frac{2g(\gamma_s - \gamma)}{3,5\gamma}} d_{ср} \lg \frac{8,8H}{d_{5\%}}, \quad (13.29)$$

где $d_{ср}$ — средний диаметр частиц донных наносов в m , $d_{5\%}$ — диаметр крупных фракций, доля которых составляет 5% в общей смеси донных отложений, H — глубина потока в m , γ — удельный вес воды ($\gamma = 1,0 \text{ т/м}^3$), γ_s — удельный вес частиц наносов. Для обычных речных наносов с достаточным приближением можно принять $\gamma_s = 2,7 \text{ т/м}^3$; получаемая по формуле скорость выражается в $m/сек$.

Формулы Шамова и Гончарова в настоящее время наиболее часто применяются в практических расчетах.

Познакомимся еще с формулой И. И. Леви, которая получена им для относительно глубоких потоков, глубина которых H удовлетворяет неравенству $H > 60 d$ (глубина и диаметр частиц выражаются в m). Формула Леви имеет вид

$$v_{нач} = 3,2 \sqrt{gd} \lg \frac{H}{7d}. \quad (13.30)$$

Рассмотрим формулы, предложенные некоторыми авторами для выражения расхода влекомых наносов (расхода крупных наносов, переносимых в придонном слое потока). Для решения задачи о расходе влекомых наносов использовались чисто эмпирический и экспериментально-теоретический подходы. Попытки чисто теоретического решения задачи привели к получению довольно сложных зависимостей, содержащих неизвестные коэффициенты и функции, которые опять-таки устанавливались экспериментально. Теоретические решения выполнялись на основе динамического подхода, т. е. изучения сил, действующих на находящуюся на дне частицу, путем использования статистического метода и, наконец, при использовании метода размерностей, применимого, строго говоря, лишь к анализу экспериментальных данных.

На основе довольно простых выкладок можно прийти к выводу о том, что средняя скорость донного влечения частицы наносов $v_{ч}$ равна разности между донной скоростью потока $v_{дн}$ и начальной донной скоростью влечения частицы $v_{нач. дн}$. Экспериментальные данные указывают на то, что такая зависимость осуществляется с достаточным приближением, поэтому можно

написать

$$v_{\text{ч}} = v_{\text{дн}} - v_{\text{нач. дн}} \quad (13.31)$$

При переходе к средней по вертикали скорости потока получаем более сложную зависимость.

Г. И. Шамоу использовал весьма простой способ вывода приближенной зависимости для расхода влекомого наноса $R_{\text{вл}}$. Он принял условно, что частицы в процессе влечения не отрываются от дна, т. е. перемещаются в придонном слое потока высотой, равной среднему диаметру частицы d . Обозначая сплошность донного влечения через m , Шамоу пишет

$$R_{\text{вл}} = \gamma_s B_1 m d v_{\text{ч}}, \quad (13.32)$$

где γ_s — удельный вес частиц наносов, B_1 — ширина той части русла, в пределах которой происходит донное влечение. По указаниям Г. В. Лопатина,

$$B_1 \cong 0,6B,$$

где B — полная ширина реки.

Если на основании разработок Г. И. Шамоу принять, что сплошность движения наносов m пропорциональна третьей степени отношения средней скорости потока к скорости массового движения наносов данного размера $v_{\text{нач. верх}}$ и обратно пропорциональна \sqrt{d} , то формулу (13.32) можно переписать следующим образом:

$$R_{\text{вл}} = k \gamma_s B \left(\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{нач. верх}}} \right)^3 \frac{d}{\sqrt{d}} (v_{\text{дн}} - v_{\text{нач. дн}});$$

здесь k — обобщающий коэффициент.

От донной скорости к средней Шамоу переходит при использовании следующего принятого им на основании опытных данных соотношения:

$$v_{\text{дн}} = v_{\text{ср}} \left(\frac{d}{H} \right)^{1/4},$$

где H — глубина потока. В соответствии с этим формула $R_{\text{вл}}$ приобретает вид

$$R_{\text{вл}} = kB \gamma_s \sqrt{d} \left(\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{нач. верх}}} \right)^3 (v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}}) \left(\frac{d}{H} \right)^{1/4}. \quad (13.33)$$

Обработка экспериментальных данных позволила Г. И. Шамоу для обычных речных наносов получить $k \cdot \gamma_s = 0,95$. Соответственно его формула приобретает вид

$$R_{\text{вл}} = 0,95B \sqrt{d} \left(\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{нач. верх}}} \right)^3 (v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}}) \left(\frac{d}{H} \right)^{1/4}. \quad (13.34)$$

Размерности входящих в формулу величин следующие: B , H и d в м, все значения скорости в м/сек, $R_{\text{вл}}$ в кг/сек.

Рассмотрим формулу И. В. Егиазарова, полученную на основе метода размерностей. Эта формула имеет вид

$$G = 0,015 \gamma Q \sqrt{T} \left[\frac{R'I}{\rho' f_0 d_{50}} - 1 \right]; \quad (13.35)$$

здесь G — расход влекомых и взвешенных руслоформирующих наносов, выраженный весом наносов в воде, в $т/сек$, Q — расход воды в $м^3/сек$, I — уклон водной поверхности, $R' = R - R''$ — часть гидравлического радиуса, условно определяющая транспорт наносов (R — полный гидравлический радиус, R'' — часть гидравлического радиуса, учитывающая добавочное сопротивление, обусловленное грядовым движением наносов и сопротивлением берегов), f_0 — коэффициент сопротивления подвижного русла, d_{50} — медианный диаметр частиц, определяемый по гранулометрической кривой наносов, находящихся в движении при заданном расходе воды Q , $\rho' = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}$, γ_s и γ — удельный вес наносов и воды в $т/м^3$.

Коэффициент сопротивления f_0 определяется Егиазаровым из условий трогания частиц по выражению

$$f_0 = \frac{R'I}{\rho' d_{\max}}, \quad (13.36)$$

в котором d_{\max} — максимальный размер частицы, перемещаемой при данном режиме потока (или частицы, находящейся в предельном равновесии). Величина d_{\max} может быть определена по гранулометрической кривой наносов, находящихся в движении при заданном расходе воды, при использовании приведенной выше формулы Шамова для начальной скорости влечения.

Для широких безгрядовых русел (т. е. в случае отсутствия сопротивления, обусловленного влиянием берегов и грядовых образований) вместо доли гидравлического радиуса R' в формулу (13.35) вводится средняя глубина потока $H_{\text{ср}}$. Медианный диаметр d_{50} для неширокой смеси наносов может быть заменен средним диаметром частиц ($d_{50} \cong d$) из состава передвигаемых фракций.

Подстановка в формулу (13.35) вместо величин f_0 , R' и d_{50} принятых выше значений, введение множителя $\frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma} = 1,6$

для перехода от веса в воде к весу в воздухе, а также замена уклона I его значением по формуле Шези позволяют записать формулу Егиазарова следующим образом:

$$R_{\text{вл}}^* = 24Q \frac{v_{\text{ср}}}{C \sqrt{H}} \left(\frac{d_{\max}}{d} - 1 \right). \quad (13.37)$$

Расход влекомых и взвешенных руслоформирующих наносов $R_{вл}^*$ выражается в кг/сек (вес в воздухе).

Кроме приведенных выше формул в практике расчетов применяется также формула В. Н. Гончарова (1962 г.) для расхода влекомых наносов, которая имеет вид

$$R_{вл} = 1,2B(1 + \varphi)v_{нач}d\left(\frac{v_{ср}}{v_{нач}}\right)^{4,3}. \quad (13.38)$$

Размерности величин те же, что и в формуле Шамова. Параметр φ является поправочным множителем и выражает отношение скорости равномерного падения частицы диаметром $d_{ср}$ при турбулентном режиме осаждения к действительной гидравлической крупности этой частицы. Значение φ определяется по табл. 13.7.

Таблица 13.7

Значения параметра φ в формуле В. Н. Гончарова

$d_{ср}$ мм	0,06	0,1	0,4	0,8	1,2
φ	15,8	7,3	2,1	1,4	1,2

Если донные отложения содержат крупные неподвижные фракции, то при расчете расхода наносов по приведенным выше формулам производят отсечение крупных неподвижных фракций, оценивая наиболее крупную передвигаемую частицу по формуле начальной скорости. Значения среднего диаметра частиц d и $d_{5\%}$ определяются по составу передвигаемых наносов донных отложений.

В начале настоящей главы отмечалось, что во многих случаях донные отложения в реках и ручьях принимают форму гряд. Размеры этих гряд иногда оказываются весьма значительными: высоты гряд могут достигать $1/5$ — $1/10$ глубины потока, а их длины часто превышают глубину. Небольшие донные гряды называют рифелями. Гряды обычно перемещаются в направлении течения. Особенностью движения гряды является то, что частицы наносов, находящиеся в гряде, оказываются неподвижными, перемещение же гряды осуществляется за счет того, что с ее тыльной стороны срываются наносы и увлекаются потоком, а в области ее фронта происходит осаждение частиц. Таким образом, за счет взмыва, транспорта и переотложения наносов гряда, с одной стороны размывается, а с другой намывается, в результате чего наблюдается перемещение гряды. Схема перемещения гряд показана на рис. 13.4.

В формировании донных гряд, как и вообще донных отложений, участвуют преимущественно наиболее крупные из транспортируемых потоком наносов. Мелкие фракции в составе наносов, образующих гряды, содержатся в сравнительно небольшом проценте, однако этот процент играет весьма важную роль

в формировании мутности потока и общего расхода наносов. Наиболее крупные наносы, перемещающиеся в придонном слое потока и преимущественно участвующие в формировании гряд, некоторыми исследователями (К. И. Россинский, И. А. Кузьмин, И. В. Егиазаров и др.) именуется руслоформирующими наносами. В гидрометрической практике эти наносы называют влекомыми, учитывая, что большая их часть переносится в придонном слое потока, хотя надо иметь в виду, что эти наносы могут увлекаться восходящими вихрями и переноситься на значительном расстоянии от дна.

Рассмотренные выше формулы расхода влекомых наносов применяются для оценки транспорта как гравелисто-галечных наносов в горных реках, так и песчаных и песчано-гравелистых наносов в равнинных реках.

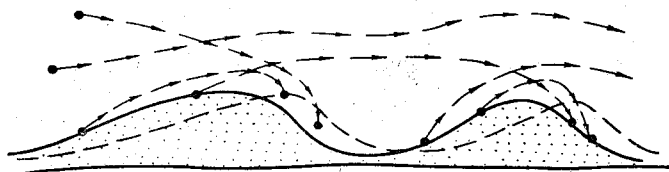


Рис. 134. Схема перемещения донных гряд.

(Пунктиром показано положение гряд через некоторый интервал времени. Стрелками отмечены пути перемещения частиц наносов).

Г. В. Лопатин еще в тридцатых годах предложил оценивать расходы влекомых наносов по данным натурных измерений размеров и перемещения донных гряд. Метод Лопатина был развит затем в работах В. Е. Любимова, проводившего исследования на р. Оби, и Д. Я. Ратковича, изучавшего наносы крупных оросительных каналов.

Изучая движение наносов по перемещению донных гряд, более правильным было бы говорить не о расходах влекомых наносов, а о расходах наносов, формирующих гряды, или о расходах руслоформирующих наносов. При измерении расходов взвешенных наносов посредством отбора проб на мутность эти наносы оказываются в значительной мере, хотя, по-видимому, и не полностью, учтенными.

Расход наносов, формирующих гряды R_r , вычисляется по весьма простой формуле, которая выводится следующим образом.

Вес наносов, заключенных в одной гряде, приходящийся на один погонный метр ее фронта, определяется произведением $\gamma_r W_r$, где γ_r — объемный вес наносов, слагающих гряду, W_r — объем тела гряды на 1 м ее фронта. Очевидно что

$$W_r = h_{cp} l_r 1,$$

где l_r — длина гряды, измеряемая по расстоянию между двумя смежными ложбинами или гребнями, h_{cp} — средняя высота гряды. С достаточным приближением, учитывая пространственный характер гряды, можно принять, что $h_{cp} \cong \frac{h_r}{3}$; через h_r обозначена максимальная высота гряды; обычно она измеряется при натурном или лабораторном изучении гряд.

Время прохождения гряды через какой-либо фиксированный створ равно $t = \frac{l_r}{v_r}$, где v_r — скорость движения гряды.

Деля вес наносов, заключенных в гряде, на время ее перемещения через створ, находим расход наносов, формирующих гряды R_r ,

$$R_r = \frac{1}{3} \gamma_r h_r v_r. \quad (13.39)$$

Ниже мы увидим, что существуют приближенные эмпирические формулы для оценки величин h_r и v_r . Это позволяет производить приближенные вычисления расходов рассматриваемой категории наносов.

§ 4. Теоретические исследования взвешивания наносов

Теория движения и взвешивания наносов за последние годы достигла значительных успехов, хотя вполне совершенного решения до сих пор еще не получено.

Некоторые положения теории взвешивания наносов были рассмотрены В. Г. Глушковым в 1911 г., показавшим связь взвешивания частиц с вертикальной составляющей пульсационной скорости. Он нашел, в частности, что предельная крупность взвешиваемых в потоке частиц определяется максимальной величиной вертикальной составляющей пульсационной скорости w_{max} . На основании этого Глушков предложил способ определения вертикальной составляющей скорости в потоке, заключающийся в том, что из потока берутся пробы взвешенных наносов и из этих проб выделяются наиболее крупные частицы. Вертикальная составляющая скорости считается равной гидравлической крупности этих частиц.

Основы диффузионной теории турбулентности и, в частности, теории взвешивания разрабатывались в 1915—1923 гг. В. Шмидтом, Дж. Тейлором и др.; с исследованиями Глушкова эти ученые не были знакомы. В работах Шмидта и Тейлора проблема взвешивания частиц рассмотрена более полно, чем у Глушкова, и дано довольно широкое решение, относящееся к одномерной задаче и условиям атмосферы.

В тридцатых годах В. М. Маккавеев разработал диффузионную теорию турбулентности и взвешивания наносов для русловых

потоков. Он составил дифференциальные уравнения турбулентного движения и турбулентной диффузии применительно к пространственной задаче. В уравнении диффузии учитывается различие удельных весов взвешенного материала и жидкости, а также скорость относительно движения твердых частиц. Такой учет осуществляется посредством члена уравнения, содержащего гидравлическую крупность частиц. Основы диффузионной теории детально рассмотрены в главе IV настоящей книги, где приведен вывод выражения среднего секундного переноса взвешенного вещества через единицу горизонтальной площадки внутри турбулентного потока и рассмотрено дифференциальное уравнение турбулентной диффузии, с помощью которого, как указано, могут решаться многие теоретические и практические задачи.

Диффузионная теория имеет преимущество перед другими существующими в настоящее время теориями взвешивания наносов. Важным при этом является то обстоятельство, что в этой теории процесс рассматривается в весьма общем виде, а дифференциальное уравнение диффузии содержит единственный параметр A — коэффициент турбулентного обмена, который связан с динамикой потока и для которого установлена эмпирическая зависимость. Теория позволяет решать разнообразные конкретные задачи, относящиеся как к взвешиванию и транспорту наносов, так и к деформации русла.

К недостаткам диффузионной теории относится неучет взаимного влияния взвешенных частиц, их влияния на турбулентную структуру потока, отсутствие учета инерции твердых частиц в пульсирующем турбулентном потоке. Эти недостатки особенно существенны при изучении движения крупных наносов. Одним из недостатков является и то, что универсальность выражения коэффициента турбулентного обмена теоретически не доказана и имеет лишь опытное подтверждение, основанное на данных приближенных натурных и лабораторных исследований. Все это вызывает необходимость дальнейших теоретических и лабораторных исследований, направленных на развитие теории взвешивания и движения наносов.

В сороковых годах М. А. Великанов предпринял попытку разработать новую теорию взвешивания и движения наносов. Он исходил при этом из стремления учесть влияние взвешенных в потоке частиц на его структуру и непосредственно учесть влияние силы тяжести, действующей на взвешенные в воде частицы наносов. Заметим, что в диффузионной теории эти силы учитываются посредством введения в уравнение гидравлической крупности частиц. Великанов назвал свою теорию гравитационной.

Полностью отказаться от положений диффузионной теории Великанову не удалось, так как выведенная им для установившегося равномерного прямолинейного широкого потока основная кинематическая зависимость взвешивания оказалась практиче-

ски полностью совпадающей с основной кинематической зависимостью диффузионной теории. Как известно, последняя имеет вид

$$(q_s)_y = -\frac{g}{\gamma} A \frac{ds}{dy} + us, \quad (13.40)$$

где $(q_s)_y$ — секундный расход наносов через единицу горизонтальной площадки, имеющей нормалью ось y , направленную сверху вниз, s — мутность в относительных объемных единицах, u — гидравлическая крупность частиц.

В гравитационной теории выражение $(q_s)_y$ имеет вид

$$(q_s)_y = \overline{v'_y s'} + us(1 - s). \quad (13.41)$$

Здесь s' и v'_y — соответственно пульсационные значения мутности и вертикальной составляющей скорости, $\overline{v'_y s'}$ — момент корреляции мутности и вертикальной составляющей скорости.

Приведенная запись уравнения отличается от записи Великанова, поскольку принято другое направление оси y ; у Великанова вертикальная ось направлена снизу вверх.

Разность $1 - s$ только при очень большой мутности заметно отличается от единицы. Даже при мутности, крайне редко встречающейся в естественных потоках, равной $50\,000 \text{ г/м}^3$, указанная разность может быть принята приблизительно равной единице. Это легко проверить. Мутность в относительных объемных единицах может быть вычислена по весовой мутности следующим образом:

$$s = \frac{s_{\text{вес}}}{\gamma_s 10^6};$$

здесь γ_s — удельный вес частиц наносов (для речных наносов $\gamma_s \cong 2,65 \text{ т/м}^3$), $s_{\text{вес}}$ — мутность в г/м^3 , число 10^6 выражает количество граммов в одной тонне. Если весовая мутность равна $50\,000 \text{ г/м}^3$, то относительная объемная мутность окажется равной $0,02$. Действительно, с достаточным приближением можно принять $1 - s \cong 1$. Величина $(1 - s)$ рассматривается как поправка к гидравлической крупности частиц u , находящихся в сильно насыщенном наносами потоке; поэтому произведение $(1 - s)u$ носит название скорости стесненного осаждения частиц.

Поправка Великанова имеет большое значение в теории весьма насыщенных наносами потоков. С такой насыщенностью мы встречаемся в селевых потоках и при движении пульпы, т. е. смеси грунта с водой, перегоняемой по трубам для намыва плотин, при отводе грунта во время разработок речных прорезей и т. д. Для речных потоков поправка Великанова мало отличается

от единицы и во внимание не принимается. Поэтому вместо выражения (13.41) можно написать

$$(\overline{q_s})_y = \overline{v_y s'} + us. \quad (13.42)$$

В главе IV уже было показано, что разработками В. Шмидта и В. М. Маккавеева для установившегося равномерного широкого прямолинейного потока получено равенство

$$\overline{v_y s'} \cong -\frac{g}{\gamma} A \frac{ds}{dy}, \quad (13.43)$$

из которого видно, что в основе гравитационной теории лежит та же кинематическая зависимость, что и в основе диффузионной теории. Существенная поправка в виде множителя $(1 - s)$ дается лишь для потоков весьма большой мутности.

При установившемся распределении мутности в потоке $(\overline{q_s})_y = 0$, т. е. результирующий перенос наносов из придонной части потока в поверхностную или в обратном направлении отсутствует. Именно такой случай и рассматривается в гравитационной теории. В соответствии с этим для потоков большой мутности Великанов записал основное кинематическое соотношение таким образом:

$$\overline{v_y s'} = -us(1 - s). \quad (13.44)$$

В дальнейших выкладках гравитационной теории были допущены неточности, которые отразились и на конечных формулах. На эти неточности обращалось внимание в дискуссии по гравитационной теории, проходившей в начале 50-х годов. В 1957 г. Великанов пересмотрел свою теорию, используя при этом метод размерностей. Последнее хотя и избавило теорию от некоторых неточностей, однако лишило ее в значительной мере и физического содержания.

Стационарное распределение в потоке осредненных во времени значений мутности отвечает равновесию процессов взвешивания и осаждения наносов как в толще потока, так и в придонном его слое. Последнее условие совпадает с условием отсутствия односторонних деформаций русла (размывов или заиления). Расход наносов в этом случае определяет транспортирующую способность потока, т. е. его способность переносить определенное количество наносов данной крупности или данного гранулометрического состава.

Понятие транспортирующей способности является весьма важным и используется при решении многих теоретических и практических задач о движении наносов и деформации речного русла. Транспортирующую способность потока можно характеризовать и через среднюю мутность, отвечающую тому насыщению потока, при котором реализуется транспортирующая способность. Эту ве-

личину будем обозначать через $S_{тр}$. Формула, рекомендуемая для расчета $S_{тр}$, выводится на основе диффузионной теории взвешивания наносов (см. в следующих параграфах).

В гравитационной теории предлагается зависимость для величины $S_{тр}$, которую можно привести к виду

$$S_{тр} = \frac{f\left(\frac{d_{ср}}{H}\right) v_* I}{u}, \quad (13.45)$$

где u — гидравлическая крупность взвешенных наносов, $f\left(\frac{d_{ср}}{H}\right)$ — функция отношения среднего диаметра находящихся на дне и определяющих шероховатость русла частиц к глубине потока. Функция включает как постоянный множитель единицу, деленную на число Кармана, $\kappa \cong 0,4$. Через v_* обозначена так называемая динамическая скорость, выражаемая формулой

$$v_* = \sqrt{gHI}. \quad (13.46)$$

В докладе на III Всесоюзном гидрологическом съезде Великанов отметил, что вид функции $f\left(\frac{d_{ср}}{H}\right)$ остался невыясненным. Очевидно, что формула (13.46) может применяться в случае, если имеются натурные материалы, позволяющие хотя бы приближенно установить указанную функцию.

Рядом исследователей была проведена работа по сравнению уравнений распределения мутности по вертикали, полученных на основе диффузионной и гравитационной теории с натурными эпюрами мутности. Было установлено, что удовлетворительную сходимость дает диффузионная теория, тогда как по гравитационной теории получается очень большое отклонение.

Теоретическое исследование процесса взвешивания наносов, завершившееся составлением сложной системы уравнений, было выполнено Г. И. Баренблатом. Несмотря на многие ограничения, принятые при теоретической разработке, эта система уравнений оказалась незамкнутой. Для замыкания системы используется гипотеза Н. А. Колмогорова о диссипации пульсационной энергии, а также соотношения, получаемые из теории размерности. Замкнутая система уравнений Баренблата даже для стационарного плоского горизонтального потока состоит из трех уравнений и оказывается весьма сложной. Она содержит, кроме того, постоянные величины, численные значения которых неизвестны.

Весьма глубокий теоретический анализ взвесенесущего потока выполнен Ф. И. Франклем, который составил систему уравнений, включающую уравнение неразрывности, количества движения, энергии осредненного и пульсационного движения для

взвесенесущего потока и для взвешенных твердых частиц. Эта система, состоящая из двадцати уравнений, осталась незамкнутой. Количество неизвестных в ней равно 39.

В целях замыкания полученной системы Франкль принял независимость поля скоростей потока (осредненных и мгновенных) от присутствия твердых частиц и принял его заданным. Все затруднения этим не были устранены и он вынужден был принять некоторые добавочные упрощающие предположения. В результате Франкль получил замкнутую, но тем не менее очень сложную систему четырех уравнений. Для случая равномерного движения из указанной системы уравнений получаются зависимости, согласующиеся с диффузионной теорией.

Следует признать, что в настоящее время только диффузионная теория может использоваться для решения конкретных практических задач о транспорте взвешенных наносов.

§ 5. Распределение мутности по вертикали

Общий характер распределения мутности по вертикали речного потока выражается экспоненциальной кривой с наибольшим значением мутности у дна и наименьшим у поверхности. Если процесс взвешивания стабилизировался, то в равномерном установившемся потоке характер распределения мутности вдоль потока не изменяется. Это соответствует состоянию насыщения потока наносами, отвечающему его транспортирующей способности. Эпюра мутности в этом случае отражает равновесие между взвешиванием и осаждением наносов. Ниже такая эпюра будет получена теоретически.

Эпюры распределения мелких наносов отличаются относительной пологостью, а крупных — значительной крутизной (рис. 13.5). Влияние местных условий на распределение мутности является весьма существенным, поэтому в реках, отличающихся изменением глубин и скоростей по длине и ширине потока, наблюдается и изменение вида эпюр мутности. От участка к участку может изменяться и степень насыщенности потока в связи с изменением скорости течения. Это приводит также к различию формы эпюры мутности (рис. 13.5).

Для выяснения общего характера распределения мутности в речном потоке необходимо анализировать осредненные для участков реки графики мутности и связывать получаемые осредненные кривые со средними значениями скорости, глубины, крупности наносов; это в значительной мере исключает влияние местных условий.

Параметры получаемого ниже уравнения распределения мутности по вертикали должны быть связаны со средними значениями гидравлических элементов потока на участке.

Перейдем непосредственно к теоретическому изучению распределения мутности по вертикали.

Запишем общее уравнение турбулентной диффузии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = \\ & = \frac{g}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right] - u \frac{\partial s}{\partial y}. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай установившегося равномерного потока, не имеющего поперечных течений и характеризующегося неизменными во времени и по координатам x и z условиями взве-

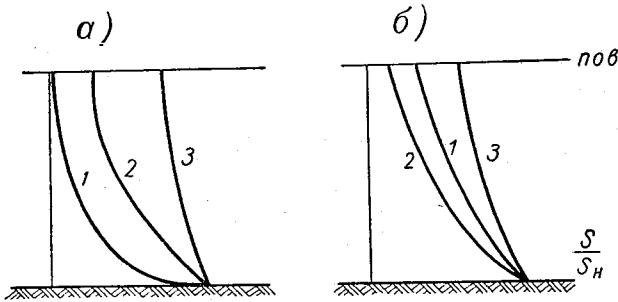


Рис. 13.5. Распределение безразмерной мутности $\frac{S}{S_H}$ по вертикали.

а: 1 — крупные наносы, 2 — средние наносы, 3 — мелкие наносы; *б:* 1 — распределение мутности в потоке, насыщенном наносами, 2 — поток недогружен наносами, 3 — поток перегружен.

шивания наносов. Ось y вертикальна и направлена от поверхности ко дну потока.

В этом случае общее уравнение упрощается (так как ряд его членов превращается в нуль) и приобретает вид

$$\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{d}{dy} \left(A \frac{ds}{dy} \right) - u \frac{ds}{dy} = 0. \quad (13.47)$$

Интегрирование уравнения (13.47) позволяет получить выражение профиля мутности по вертикали (или эпюру мутности).

Уравнение (13.47) является дифференциальным уравнением второго порядка, поэтому для получения функции $s(y)$ необходимо произвести интегрирование два раза и найти после первого интегрирования произвольную функцию интегрирования, а после повторного — произвольную постоянную интегрирования

$$\frac{g}{\gamma} \int d \left(A \frac{ds}{dy} \right) = u \int ds + \varphi_1, \quad (13.48)$$

где φ_1 — произвольная функция интегрирования,

$$\frac{g}{\gamma} A \frac{ds}{dy} = us + \varphi_1; \quad (13.49)$$

величина φ_1 находится из условия, выражающего отсутствие переноса наносов через свободную поверхность, именно

$$\text{при } y=0, \quad \frac{g}{\gamma} A_0 \left(\frac{ds}{dy} \right)_0 - us_0 = 0;$$

в соответствии с этим $\varphi_1 = 0$.

Итак, после первого интегрирования имеем

$$\frac{ds}{s} = \frac{\gamma u}{gA} dy. \quad (13.50)$$

Мы знаем, что коэффициент турбулентного обмена может быть выражен формулой

$$A = \frac{\gamma H v_0}{MC} \sqrt{1 - P \frac{y^2}{H^2}}.$$

Подставляя эту формулу в уравнение (13.50), находим

$$\frac{ds}{s} - \frac{MCu}{gv_0} \cdot \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{1 - P\tilde{y}^2}} = 0,$$

где $\tilde{y} = \frac{y}{H}$. Интегрируя, получаем

$$\ln s - \frac{MCu}{gv_0 \sqrt{P}} \arcsin(\tilde{y} \sqrt{P}) + c_1 = 0. \quad (13.51)$$

Произвольную постоянную c_1 определяем из граничного условия у дна: при $\tilde{y} = 1$ мутность $s = s_H$ (где s_H — мутность у дна).

Подставляя граничные значения \tilde{y} и s в уравнение (13.51), находим

$$c_1 = -\ln s_H + \frac{MCu}{gv_0 \sqrt{P}} \arcsin \sqrt{P}. \quad (13.52)$$

Подставив значение c_1 в уравнение (13.51), будем иметь

$$\ln \frac{s}{s_H} = -\frac{MCu}{gv_0 \sqrt{P}} \left[\arcsin \sqrt{P} - \arcsin(\tilde{y} \sqrt{P}) \right]. \quad (13.53)$$

Вводя функцию $\beta(\tilde{y})$, определяемую равенством

$$\beta(\tilde{y}) = \arcsin \sqrt{P} - \arcsin(\tilde{y} \sqrt{P}), \quad (13.54)$$

и учитывая, что

$$\sqrt{P} = \sqrt{\frac{Mv_{\text{cp}}^2}{Cv_0^2}},$$

пишем

$$\ln \frac{s}{s_H} = - \frac{C \sqrt{MC} u}{g v_{\text{cp}}} \beta(\tilde{y}) \quad (13.55)$$

или

$$s = s_H e^{-a G \beta(\tilde{y})}, \quad (13.56)$$

где

$$G = \frac{u}{v_{\text{cp}}} \quad \text{и} \quad a = \frac{C \sqrt{MC}}{g}.$$

Формула (13.56) выражает распределение мутности по вертикали. Эта формула получена в 1948 г. автором настоящей книги.

Для облегчения пользования формулой (13.56) предлагаются графики, изображенные на рис. 13.6, где к случаю открытого потока относится правая часть чертежа, охватывающая относительные глубины от $\tilde{y}=0$ до $\tilde{y}=1$. Весь чертеж от $\tilde{y}=-1$ до $\tilde{y}=+1$ относится к случаю распределения мутности по вертикальному диаметру круглой трубы, расположенной горизонтально. К этому случаю в полной мере применимо уравнение (13.56), в которое вместо величины s_H подставляется s_a , выражающее величину мутности в нижней точке сечения трубы (на пересечении вертикального диаметра со стенкой трубы); кроме того, принимается $\tilde{y} = \frac{y}{D}$, где D — диаметр трубы.

Упрощенное уравнение распределения мутности можно получить, если принять предположение о постоянстве коэффициента турбулентного обмена по вертикали и в качестве уравнения распределения скорости по вертикали параболу Базена. Такое уравнение, впервые полученное В. М. Маккавеевым в 1931 г., имеет вид

$$s = s_H e^{-\frac{2mC}{g} G(1-\tilde{y})}; \quad (13.57)$$

здесь m — параметр параболы Базена, принимаемый равным $\frac{M}{2}$.

Записанные выше уравнения $s(\tilde{y})$ выражают распределение в потоке наносов, однородных по крупности, или распределение мутности отдельных фракций наносов, характеризуемых определенной гидравлической крупностью u , т. е. выражают распределение частной мутности по вертикали. Получение общей мутности S , отвечающей всем переносимым в потоке наносам,

осуществляется суммированием частных мутностей для каждой точки вертикали, т. е.

$$S(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^m s_i(\tilde{y}); \quad (13.58)$$

здесь m — число фракций, переносимых потоком, i — порядковый номер фракции.

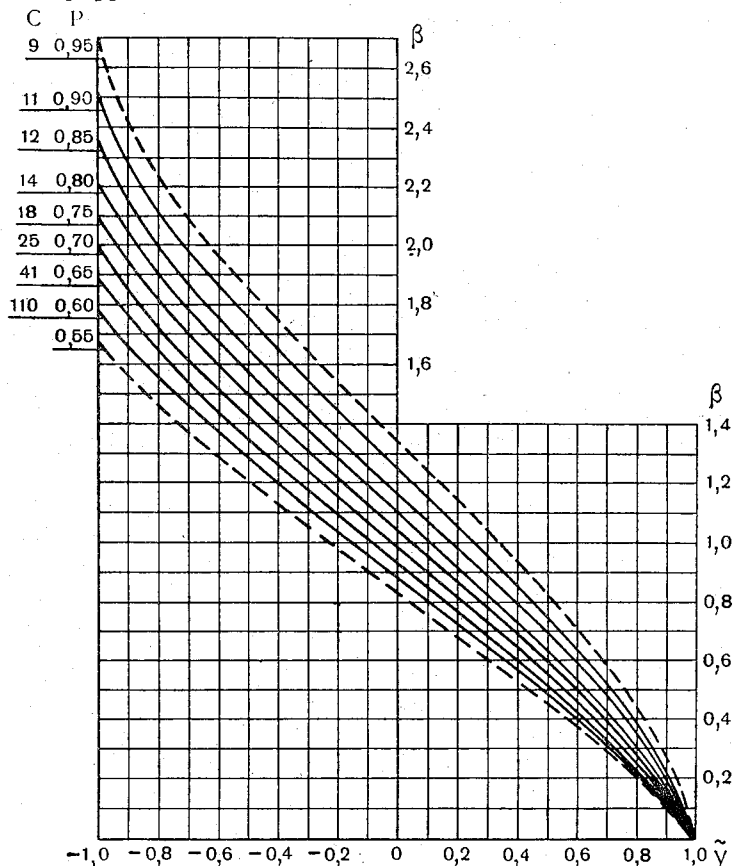


Рис. 13.6. Графики функции $\beta(\tilde{y})$ для расчета распределения мутности по вертикали.

Распределение общей мутности по вертикали может быть получено по уравнению (13.58), если задана общая мутность у дна потока S_H и процентное содержание каждой фракции в придонном слое потока.

Проверка уравнения (13.56) на материалах натурального исследования распределения мутности обнаружила его удовлетворительность.

§ 6. Активный слой русла, донные гряды и мутность взмыва

Верхний слой наносов, покрывающих русло, характеризующийся непрерывным обменом частиц наносов с потоком, называется активным слоем русла. Наносы, составляющие этот слой, как указывалось выше, называются донными наносами (иначе их можно называть наносами активного слоя русла).

Характер поверхности русла определяется составом донных отложений и динамикой потока. Весьма часто эта поверхность приобретает волнообразную форму, образуя гряды и рифеля, перемещаемые обычно по течению.

Не всегда, однако, активный слой русла состоит только из подвижных наносов. В нем нередко встречаются крупные наносы, которые в данный момент не передвигаются течением, а участвуют в общем обмене лишь в периоды повышенных расходов и скоростей потока. Крупные наносы могут быть более или менее равномерно распределены по всей поверхности русла изучаемого участка реки или же образовывать отместку отдельных зон русла, препятствуя размыву. Характер активного слоя русла сильно влияет на интенсивность русловых деформаций.

Взвешивание частиц наносов определяется разностью между значениями вертикальной составляющей пульсационной скорости и гидравлической крупностью наносов. Если гидравлическая крупность частицы u больше максимального значения вертикальной составляющей пульсационной скорости ω_{\max} у дна, то такая частица не может быть взвешена; если же ее крупность меньше ω_{\max} , то она может взвешиваться. Таким образом, неравенство $u < \omega_{\max}$ определяет условие взвешивания наносов. При разделении наносов на взвешиваемые и невзвешиваемые фракции крупность $u_{\text{пред}}$, разграничивающая эти фракции, определяется равенством

$$u_{\text{пред}} = \omega_{\max}.$$

Выше отмечалось, что среднее абсолютное значение пульсационной скорости у дна приблизительно равно среднему значению этой величины на вертикали, а эта последняя величина может быть вычислена по формуле

$$\omega = \frac{v_{\text{ср}}}{\sqrt{N}} = \frac{v_{\text{ср}} \sqrt{g}}{\sqrt{MC}},$$

где при $10 \leq C \leq 60$

$$M = 0,7C + 6.$$

В свою очередь ω_{\max} приблизительно находится из равенства

$$\omega_{\max} \cong 3\omega \cong \frac{3v_{\text{ср}}}{\sqrt{N}}.$$

Пользуясь соотношением между гидравлической крупностью наносов и характеристиками пульсационных скоростей как численным критерием, определяющим поведение наносов в потоке, можно разделить последние на следующие категории.

Категория I. Гидравлическая крупность частиц u меньше среднего значения абсолютной величины вертикальной составляющей пульсационной скорости ω . Эти наносы могут находиться сравнительно устойчиво во взвешенном состоянии в потоке и при перемещении вдоль течения в среднем могут проходить без остановок большие пути.

Категория II. Гидравлическая крупность частиц больше ω , но меньше ω_{\max} . Наносы этой категории перемещаются во взвешенном состоянии, но их взвешивание оказывается относительно неустойчивым ввиду того, что оно связано лишь с временными усилениями вертикальных пульсационных токов. Эти наносы поступают со дна внутрь потока только вместе с наиболее интенсивными вихревыми восходящими течениями, из которых они затем выпадают. Находясь на дне, эти наносы могут перекатываться под воздействием продольной скорости, они транспортируются преимущественно в придонном слое, но могут достигать и свободной поверхности потока.

Категория III. Гидравлическая крупность наносов $u \geq \geq \omega_{\max}$. Наносы не могут взвешиваться, но они могут перемещаться под влиянием продольной скорости, скользят и перекатываются по дну, иногда сальтируют (перескакивают). Эта категория соответствует влекомым наносам в собственном смысле слова.

Категория IV. К ней относятся неподвижные при данном режиме наносы, расположенные в поверхностном слое русла.

Категория V. Это совокупность всех наносов, формирующих активный слой русла, т. е. донные наносы, включающие частицы всех указанных выше четырех категорий, но совершенно в иных пропорциях, чем они транспортируются потоком.

Сопоставляя наше деление наносов с общепринятым, видим, что взвешенные наносы соответствуют категориям I и II, влекомые — в основном категориям II и III, но частично включают и категорию I. Донные наносы в общепринятой классификации и у нас имеют тождественное значение, они состоят из фракций, соответствующих всем имеющимся на дне категориям наносов, и образуют активный слой русла. Если наносы категории IV покрывают все русло или значительные его участки, то образуется так называемая отмостка и весь активный слой русла оказывается состоящим практически из наносов этой категории.

При изменениях режима течения во времени вдоль или поперек реки наносы одинаковых размеров могут перемещаться по-разному в связи с изменением гидравлики потока; вследствие этого они могут переходить из одной категории в другую.

Для количественной характеристики возможности взаимодействия потока с поверхностью русла, т. е. с его активным слоем, вводится русловой коэффициент μ_B , именуемый коэффициентом взвешивания донных наносов. Коэффициент μ_B определяется так.

Строится график гранулометрического состава донных наносов по их гидравлической крупности и на нем проводится вертикальная линия из точки $u = u_{\text{пред}}$. Слева от этой линии график будет соответствовать взвешиваемым фракциям. Обозначим площадь этой части графика через $\Omega_{\text{взв}}$. Справа от указанной линии будет расположена часть графика, отвечающая невзвешиваемым фракциям. Если общая площадь графика $\Omega_{\text{общ}}$, то коэффициент взвешивания μ_B определится таким образом:

$$\mu_B = \frac{\Omega_{\text{взв}}}{\Omega_{\text{общ}}} \quad (13.59)$$

Если все наносы активного слоя при данном режиме потока могут быть взвешены, то $\mu_B = 1$, если все наносы не взвешиваются, то $\mu_B = 0$.

Коэффициент μ_B используется при расчете транспортирующей способности потока и русловых деформаций для выделения взвешиваемых фракций из состава донных отложений.

Для приближенной оценки элементов донных гряд могут использоваться эмпирические формулы, полученные на основании лабораторных (и отчасти натуральных) исследований.

В. Ф. Пушкарев рекомендует следующие приближенные выражения скорости движения гряды v_r и ее высоты h_r :

$$v_r = 0,0188 \frac{v_{\text{ср}}^3}{gH} - 0,0292 \frac{gd}{v_{\text{ср}}}, \quad (13.60)$$

$$h_r = 0,00445 \frac{v_{\text{ср}}^2}{gd} H + 0,049H. \quad (13.61)$$

Здесь $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость течения, H — глубина потока, d — диаметр частиц наносов, g — ускорение силы тяжести. Все линейные размеры даны в миллиметрах.

В последние годы обстоятельные работы по изучению донных гряд были выполнены В. С. Кнорозом, Н. А. Михайловой, Н. С. Знаменской.

Для средних размеров гряд и скорости их движения Кнороз получил следующие приближенные формулы:

$$h_r = 3,5 \frac{\left(\frac{v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}}}{v_{\text{ср}}} \right)^{2/3}}{\lg \frac{R}{d} + 6} R, \quad (13.62)$$

$$I_r = \frac{\left(\lg \frac{R}{d} + 6 \right) h_r}{1,2} \left(\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}}} \right)^{5/3}, \quad (13.63)$$

$$v_r = 0,4 \sqrt{gd} \left(\frac{v_{cp} - v_{нач}}{\sqrt{gR}} \right)^{5/2}, \quad (13.64)$$

где l_r — длина гряды, R — гидравлический радиус потока, d — преобладающий размер донных наносов (все линейные величины выражены в метрах), $v_{нач}$ — начальная скорость влечения в м/сек.

Рассмотрим условия взмыва наносов в придонном слое потока и формирования донной мутности. В процессе турбулентного перемешивания непрерывно происходит обмен водными массами придонного слоя и всей толщи турбулентного потока. Нисходящие течения турбулентной пульсации приносят в придонный слой потока объемы жидкости, обладающие меньшей мутностью, чем объемы жидкости в восходящих вихрях, только что оторвавшихся от поверхности русла. При таком взаимообмене в придонном слое

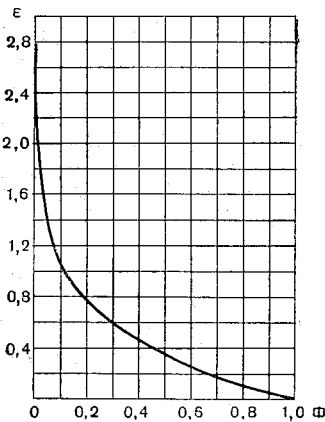


Рис. 13.7. График функции $\Phi(\varepsilon)$.

наблюдается исключительно интенсивная пульсация мутности. Среднее значение донной мутности S_H предполагается полученным на основании осреднения мутности во времени. Частную донную мутность, отвечающую отдельной фракции (например, i -той), обозначим через S_{Hi} .

В придонном слое потока, имеющем непосредственный контакт с руслом, осуществляется обмен наносами потока и русла. Скользящие по поверхности дна вихри производят взмучивание и выбрасывают в придонный слой объемы воды с весьма высоким содержанием наносов. На поверхностях контакта таких вихрей с руслом мутность достигает исключительно большой

величины. Эту мутность называют мутностью взмыва. Общую мутность взмыва обозначают через $S_{взм}$, частную, отвечающую содержанию, например, i -той фракции, через $S_{взм i}$.

Выполненное автором настоящей книги теоретическое рассмотрение вертикального переноса наносов, осуществляемого с помощью вихревых объемов жидкости в придонном слое потока [10] позволил при учете гауссовского распределения пульсационных скоростей получить следующее уравнение вертикального результирующего переноса наносов частной фракции у дна:

$$q_{si} = \frac{\omega}{2} (S_{Hi} - \Phi_i S_{взм i}) (1 + \varepsilon_i); \quad (13.65)$$

здесь ω — среднее значение абсолютной величины вертикальной составляющей пульсационной скорости, Φ_i — функция безраз-

мерной величины ε . Последняя для i -той фракции наносов вычисляется по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{u_i}{w}, \quad (13.66)$$

в которой u_i выражает среднюю для i -той фракции наносов гидравлическую крупность. Функция Φ определяется довольно сложной формулой; для расчетов рекомендуется график $\Phi(\varepsilon)$, представленный на рис. 13.7.

В приведенных выше соотношениях мутность измеряется в относительных объемных единицах, т. е. выражает отношение объема взвешенных частиц к объему заключающей их смеси воды с наносами. При такой размерности мутности $|s| = \frac{M^3 \text{ (твердого вещества)}}{M^3 \text{ (смеси)}}$ секундный расход наносов через единицу поверхности дна потока выражается в объемных единицах, поэтому можно написать

$$|q_{si}| = \frac{M^3 \text{ (тв. веш.)}}{M^2 \text{ сек}} = \frac{M}{\text{сек}}. \quad (13.67)$$

Общий результирующий секундный расход всех фракций q_s через единицу поверхности дна находится суммированием частных расходов q_{si} , т. е.

$$q_s = \frac{w}{2} \sum_{i=1}^m (S_{Hi} - \Phi_i S_{взм i}) (1 + \varepsilon_i). \quad (13.68)$$

Формулы (13.65) и (13.68) показывают направленность процесса взаимообмена потока и русла. Если получается положительное значение q_s (или соответственно q_{si}), то это свидетельствует о том, что происходит выпадение наносов из потока, его мутность постепенно уменьшается, в то же время отметка дна возрастает. Напротив, отрицательные величины q_s (или q_{si}) свидетельствуют о постепенном насыщении потока наносами и размыве русла.

Случай установившегося взвешивания отвечает отсутствию деформации русла, т. е. равенству нулю величины q_s (или соответственно q_{si} — для частной фракции). На основании такого равенства находим соотношение между S_{Hi} и $S_{взм i}$ при установившемся взвешивании

$$S_{Hi} = \Phi_i S_{взм i}. \quad (13.69)$$

Это соотношение позволяет найти и общую донную мутность

$$S_H = \sum_{i=1}^m \Phi_i S_{взм i}. \quad (13.70)$$

При известном составе наносов активного слоя русла можно перейти к составу наносов, образующих мутьность взмыва. Процентное содержание i -той фракции в составе указанных наносов будем обозначать через $\alpha_{взм\ i}$. Очевидно, что можно написать

$$S_{взм\ i} = \frac{\alpha_{взм\ i}}{100} S_{взм}. \quad (13.71)$$

Поэтому будем иметь

$$S_H = S_{взм} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{взм\ i}}{100} \Phi_i. \quad (13.72)$$

При гладкой форме русла области нисходящих и восходящих пульсационных токов (вихрей) беспорядочно располагаются над его поверхностью, сменяют друг друга через короткие интервалы времени. Все дно потока при этом представляет собой поле быстро чередующихся процессов взмыва и осаждения наносов. При нарушении баланса наносов на всей поверхности русла начинает одновременно проявляться односторонний процесс заиления или размыва.

При грядовой форме русла области размыва и области намыва (заиления) разграничены в пространстве. Размыв и взвешивание наносов сосредоточены на тыльном склоне гряды, а осаждение приурочено к фронтальному склону. Именно это и определяет направление перемещения гряды. Таким образом, тыльный склон гряды является основной областью формирования мутьности взмыва. В результате взаимообмена наносами потока и русла осуществляется перемещение донных гряд, при этом, чем интенсивнее такой взаимообмен, тем быстрее перемещаются гряды. Нарушение равновесия между осаждением и взмывом наносов вызывает, как и в случае гладкого русла, общую деформацию русла (размыв или намыв). При этом в случае размыва, например, основной областью деформации будет тыльный склон гряды, а при преобладании процесса заиления заноситься будет в основном фронтальный склон и подвалье гряды. Гряды меняют форму, но перемещение их продолжается. Средняя отметка поверхности дна изменяется в соответствии с величиной результирующего расхода q_s .

Заметим, что в бурных потоках ($Fg > 1$) при наличии достаточно мелких донных наносов образуются так называемые антидюны — весьма своеобразные гряды, которые перемещаются против течения. Такой характер движения антидюн связан с тем, что за выступом гряды образуется очень интенсивный вихрь, который размывает склон гряды, обращенный вниз по течению, а на верхнем склоне происходит отложение наносов, принесенных течением сверху. В этом случае областью основного формирования мутьности взмыва является нижний склон гряды.

Обработка большого натурального и экспериментального материала позволила автору получить следующую приближенную формулу мутности взыва:

$$S_{\text{взм}} = 0,000057N \frac{v_H^2}{H}, \quad (13.73)$$

где все обозначения прежние; напомним, что

$$N = \frac{MC}{g};$$

здесь C — коэффициент Шези.

Мутность в этой формуле выражена в относительных объемных единицах. Если перейти к весовому выражению мутности (g/m^3) и к средней скорости течения, то формула приобретет вид

$$S_{\text{взм}} = 150N\eta^2 \frac{v_{\text{ср}}^2}{H}, \quad (13.74)$$

где η — переходный множитель от средней к донной скорости, значение квадрата этой величины вычисляется по формуле

$$\eta^2 = \frac{0,53C - 4,1}{C - 2}.$$

Приведенные здесь формулы, как, впрочем, и все, относящиеся к наносам или русловым процессам, являются приближенными и могут давать иногда довольно значительные расхождения.

§ 7. Транспортирующая способность потока

Если фактический расход взвешенных наносов в потоке равен его транспортирующей способности, то осаждение и взыв наносов в придонном слое уравниваются, а эпюра мутности приобретает форму уже хорошо нам известной равновесной кривой, выражающейся экспоненциальной формулой. Значение донной мутности (общей или частной) выражается в этом случае формулами (13.69) или (13.70).

Элементарный расход наносов частной фракции p_s , т. е. ее расход на единицу ширины потока, равен взятому от поверхности до dna интегралу произведения функций $v(y)$ и $s(y)$.

Чтобы найти выражение p_s , автор воспользовался эллиптическим уравнением распределения скоростей $v(y)$ и выражением $s(y)$, приведенным в § 5 настоящей главы. Интегрируем произведение указанных функций по вертикали

$$p_s = s_H v_0 \int_0^H e^{-a\beta y \left(\frac{y}{H}\right)} \sqrt{1 - P \frac{y^2}{H^2}} dy,$$

где

$$a = \frac{C \sqrt{MC}}{g}.$$

После подстановки сюда значения β , определения квадратуры и преобразований получаем

$$p_s = \frac{s_H v_0 H}{2 \sqrt{P}} \left[\frac{aG(1-2P) + 4\sqrt{P-P^2}}{a^2G^2 + 4} + \frac{1}{aG} - \left(\frac{1}{aG} + \frac{aG}{a^2G^2 + 4} \right) e^{-aG \arcsin \sqrt{P}} \right]. \quad (13.75)$$

Непосредственно из эллиптического уравнения распределения скорости находим

$$v_0 = \frac{2v_{cp} \sqrt{P}}{\sqrt{P-P^2} + \arcsin \sqrt{P}}.$$

Подставляя значение v_0 в уравнение (13.75), выполняя дальнейшие преобразования и вводя B для обозначения следующей функции:

$$B = \frac{\frac{aG(1-2P) + 4\sqrt{P-P^2}}{a^2G^2 + 4} + \frac{1}{aG} - \left(\frac{1}{aG} + \frac{aG}{a^2G^2 + 4} \right) e^{-aG \arcsin \sqrt{P}}}{\sqrt{P-P^2} + \arcsin \sqrt{P}}, \quad (13.76)$$

получаем формулу частного элементарного расхода наносов (для i -той фракции)

$$p_{si} = H v_{cp} s_{Hi} B_i. \quad (13.77)$$

Для облегчения пользования формулой (13.77) построены графики функции B , зависящей от коэффициента Шези C и от безразмерного параметра $G = \frac{u}{v_{cp}}$ (рис. 13.8). Нетрудно заметить, что B_i выражает отношение средней частной мутности на вертикали к частной донной мутности, т. е. $B_i = \frac{s_{cp i}}{s_{H i}}$.

Учитывая, что элементарный расход воды q определяется равенством

$$q = H v_{cp},$$

запишем уравнение (13.77) следующим образом:

$$p_{si} = q s_{Hi} B_i. \quad (13.78)$$

Общий элементарный расход наносов выразится так:

$$p_s = q \sum_{i=1}^m s_{Hi} B_i. \quad (13.79)$$

Переходя от донной мутности к мутности взмыва, получаем.

$$p_s = q S_{\text{взм}} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{\text{взм}} i}{100} B_i \Phi_i. \quad (13.80)$$

Содержащуюся в формуле сумму, учитывающую влияние granulometric composition of sediments on their transport, называют:

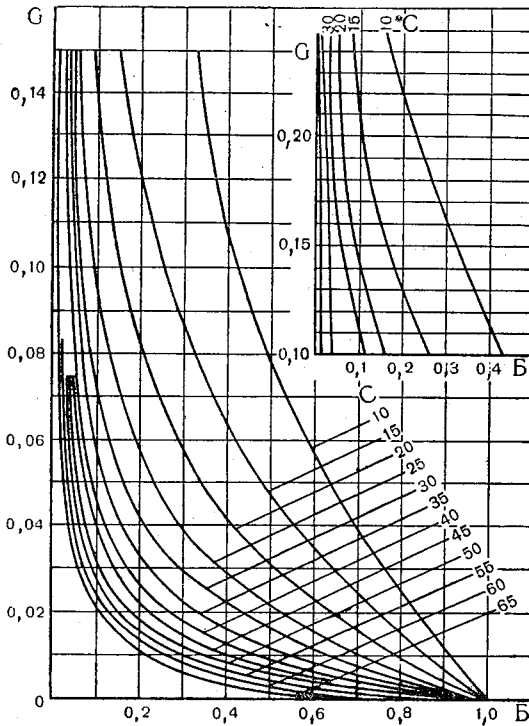


Рис. 13.8. Графики функции $B(C, G)$.

гидромеханическим параметром наносов и обозначают через Γ . Вводя эту величину в формулу (13.80) и подставляя значение $S_{\text{взм}}$, пишем

$$p_s = q k N \frac{v_H^2}{H} \Gamma, \quad (13.81)$$

где k — коэффициент, который при относительном объемном выражении мутности равен 0,000057, а при весовом ($г/м^3$) — 150.

Итак, при заданном составе донных отложений, от которого мы переходим к составу наносов, образующих мутность взмыва, гидромеханический параметр наносов определяется по формуле

$$\Gamma = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{взм\ i}}{100} B_i \Phi_i. \quad (13.82)$$

Состав донных отложений задается процентным содержанием $\alpha_{дн\ i}$ каждой из выделенных фракций. Часть фракций донных отложений может оказаться при рассматриваемом режиме взвешиваемыми, а другая часть — невзвешиваемыми. Доля взвешиваемых фракций в общем составе донных наносов определяется коэффициентом взвешивания $\mu_{в}$. Процентное содержание i -той фракции в составе взвешиваемой части донных отложений отвечает процентному содержанию этой фракции в составе мутности взмыва, обозначаемому $\alpha_{взм\ i}$. Нетрудно видеть, что

$$\alpha_{взм\ i} = \frac{\alpha_{дн\ i}}{\mu_{в}}. \quad (13.83)$$

При заданном составе транспортируемых потоком наносов применяется такая формула:

$$\Gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ср\ i}}{100 B_i \Phi_i}}, \quad (13.84)$$

где $\alpha_{ср\ i}$ — процентное содержание i -той фракции в среднем составе транспортируемых потоком наносов. В расчетах нередко используется частное значение гидромеханического параметра Γ_i , вычисляемое для i -той фракции по формуле

$$\Gamma_i = B_i \Phi_i.$$

Для вычисления полного расхода наносов через все сечение потока служит следующая формула:

$$P_s = QkN \frac{v_H^2}{H} \Gamma, \quad (13.85)$$

где Q — расход воды в $m^3/сек$. Теоретически предполагается, что вычисляемый по формуле (13.85) расход наносов соответствует транспортирующей способности потока относительно данного состава наносов. Формула является приближенной.

Вопрос о транспортирующей способности потока рассматривался М. А. Великановым (его формула приведена выше, в § 4 настоящей главы), А. Н. Гостунским, С. Х. Абальянцем, К. И. Россинским и др. Формула Гостунского приводится к виду

$$S_{тр} = 3,3 \cdot 10^6 \frac{v_{ср}^3}{C^3 H_{ср} u_{ср}}; \quad (13.86)$$

здесь $u_{\text{ср}}$ — средняя гидравлическая крупность транспортируемых наносов; мутность $S_{\text{тр}}$ получается в $г/м^3$.

Коэффициент в формуле Гостунского получен по материалам рек Средней Азии; эта формула может применяться, по-видимому, только для рек такого же типа, как реки указанной территории.

При наличии достаточных натуральных данных по мутности и гранулометрическому составу взвешенных наносов и донных отложений реки может быть использован эмпирический способ оценки транспортирующей способности потока. Для этой цели применяется метод, разработанный К. И. Россинским и И. А. Кузьминым.

Согласно рекомендациям Россинского и Кузьмина, транспортируемые потоком наносы должны быть разделены на мелкие и руслоформирующие. Последние представлены в донных отложениях реки в достаточном количестве, мелкие же фракции в этих отложениях встречаются в весьма малом количестве. По этому признаку путем сопоставления гранулометрического состава взвешенных наносов и донных отложений осуществляется разделение транспортируемых наносов на руслоформирующие и мелкие.

Получив процентное содержание руслоформирующих фракций в составе транспортируемых наносов при каждом измерении расхода, находят расходы руслоформирующих наносов и отвечающие им значения средней мутности потока. Далее вычисляется некоторый гидравлический параметр, от которого зависит мутность потока. По принятому Россинским предположению, та-

ким параметром является величина $\frac{v_{\text{ср}}}{H^{0,33}}$. Строится график зависимости $S_{\text{р.ф}}$ (мутности руслоформирующих фракций) от $\frac{v_{\text{ср}}}{H^{0,33}}$. Обычно обнаруживается значительный разброс точек, поэтому на поле чертежа изображаются верхняя и нижняя огибающие. Верхняя огибающая отвечает предельному насыщению потока наносами, т. е. его транспортирующей способности в отношении руслоформирующих фракций; она и применяется при расчете транспортирующей способности. Для мелких фракций выполняются аналогичные построения.

§ 8. Баланс наносов участка реки и распределение мутности по длине потока

В самом общем виде уравнение баланса наносов для участка реки можно написать следующим образом:

$$P_{S_{\text{нач}}} + P_{S_{\text{б.п}}} - D - P_{S_{\text{кон}}} = 0, \quad (13.87)$$

где $P_{S_{\text{нач}}}$ и $P_{S_{\text{кон}}}$ — соответственно секундные расходы наносов в начальном и конечном створах участка, $P_{S_{\text{б.п}}}$ — суммарный

расход наносов всех боковых притоков реки (рек и ручьев) на участке, D — секундное количество наносов, отлагающихся в пределах участка или поступающих в поток вследствие размыва русла и поймы, иначе D — это результирующий расход наносов деформации. Результирующим мы называем эту величину потому, что она представляет собой алгебраическую сумму размывов и отложений, имеющих место на отдельных частях рассматриваемого участка реки.

Именно, можно написать

$$D = \sum D_{i \text{ разм}} + \sum D_{i \text{ отл}}.$$

Величины $D_{i \text{ разм}}$ принимаются отрицательными, а $D_{i \text{ отл}}$ — положительными. За счет $D_{i \text{ разм}}$ мутность на участке возрастает, а за счет $D_{i \text{ отл}}$ — убывает.

Если бы расход наносов можно было измерить с очень большой точностью, то представилась бы возможность по уравнению (13.87) определить результирующую деформацию русла на участке. В действительности же точность измерений расходов наносов мала и нередко относительная ошибка достигает ± 10 — 15% . Поэтому определения результирующих деформаций по уравнению (13.87) можно выполнять лишь для участков с очень большим изменением расходов наносов по длине. Примером такого участка служит нижний бьеф гидроузла. Через начальный створ участка в этом случае поступает осветленная вода из водохранилища, поэтому можно считать $P_{S \text{ нач}} \cong 0$.

Пренебрегая боковым притоком наносов (это допустимо далеко не всегда), находим

$$D = -P_{S \text{ кон}};$$

знак минус показывает, что будет иметь место размыв русла.

Уравнение баланса наносов можно составить теоретически и использовать при расчетах распределения мутности по длине потока и деформации русла.

Рассмотрим бесприточный участок реки длиной Δx . При разделении реки на участки учтено условие малой изменчивости гидравлических элементов потока в пределах такого участка и одинаковая направленность руслового процесса, т. е. предусматривается, что в пределах участка может иметь место только размыв или только отложение наносов. Этим данное рассмотрение отличается от предыдущего, где предполагалось, что в пределах одного участка может иметь место как размыв ($D_{\text{разм}}$), так и отложение наносов ($D_{\text{отл}}$).

Расход наносов через начальный створ участка выразим произведением QS (где Q — расход воды в $\text{м}^3/\text{сек}$, S — средняя мутность в $\frac{\text{м}^3 \text{ (тв. вещ.)}}{\text{м}^3 \text{ (воды)}}$). Расход наносов через конечный створ

будет равен $Q(S + \Delta S)$, где ΔS — приращение (положительное или отрицательное) мутности на протяжении рассматриваемого участка. Через B обозначим ширину реки, а через q_s — средний на участке вертикальный расход наносов, переносимых через единицу поверхности русла (размыв или отложение). Полный вертикальный расход на участке будет равен $q_s B \Delta x$. Записываем уравнение баланса наносов следующим образом:

$$QS = Q(S + \Delta S) + q_s B \Delta x.$$

Приводя подобные и переходя от конечных приращений к бесконечно малым, получаем

$$Q dS + q_s B dx = 0. \quad (13.88)$$

Найдем теперь приближенное выражение q_s — расхода наносов через единицу поверхности русла. Такой расход будет складываться из осаждения наносов за счет гидравлической крупности частиц и взмыва наносов. Осаждение равно произведению uS , где u — средняя гидравлическая крупность частиц. Взмыв будет пропорционален разности между мутностью взмыва и средней мутностью потока, т. е. выразится величиною $k(S_{\text{взм}} - S)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Теперь можем написать

$$q_s = uS - k(S_{\text{взм}} - S). \quad (13.89)$$

Если $uS > k(S_{\text{взм}} - S)$, то имеет место отложение наносов ($q_s > 0$), если $uS < k(S_{\text{взм}} - S)$, то имеет место размыв русла ($q_s < 0$). Выражение (13.89) можно записать иначе:

$$q_s = (u + k)S - kS_{\text{взм}}. \quad (13.90)$$

Коэффициент k определяется из условия равновесия русла, при котором $q_s = 0$.

Деформация русла отсутствует только в том случае, когда мутность потока отвечает его транспортирующей способности, т. е. равна $S_{\text{тр}}$. Следовательно, можно написать

$$S_{\text{тр}}(u + k) = kS_{\text{взм}}. \quad (13.91)$$

Мы знаем, что

$$S_{\text{тр}} = \Gamma S_{\text{взм}}, \quad (13.92)$$

где Γ — гидромеханический параметр наносов.

Теперь легко находим

$$k = \frac{u\Gamma}{1 - \Gamma}. \quad (13.93)$$

Подставим выражение (13.90) в уравнение баланса (13.88)

$$[(u + k)S - kS_{\text{взм}}] B dx = -Q dS. \quad (13.94)$$

Интегрируем найденное уравнение. После определения произвольной постоянной из начального условия

$$\text{при } x=0 \quad S=S_{\text{нач}}$$

и преобразований получаем уравнение распределения мутности по длине потока

$$S = \frac{k}{u+k} S_{\text{взм}} + \left(S_{\text{нач}} - \frac{k}{u+k} S_{\text{взм}} \right) e^{-\frac{B(u+k)}{Q}x}. \quad (13.95)$$

Из выражения (13.93) вытекает такое равенство:

$$\Gamma = \frac{k}{u+k}. \quad (13.96)$$

Учитывая это равенство и выражение (13.92), приходим к окончательному виду уравнения распределения мутности по длине потока:

$$S = S_{\text{тр}} + (S_{\text{нач}} - S_{\text{тр}}) e^{-\frac{B(u+k)}{Q}x}. \quad (13.97)$$

Нетрудно видеть, что при $S_{\text{нач}} > S_{\text{тр}}$ уравнение дает уменьшение мутности по длине потока, т. е. указывает на то, что происходит заиление, а при $S_{\text{нач}} < S_{\text{тр}}$ происходит возрастание мутности, т. е. обнаруживается размыв русла.

Полученное уравнение может использоваться как для расчета деформации русла, так и для расчета распределения мутности по длине потока.

Глава XIV

ДЕФОРМАЦИЯ РЕЧНЫХ РУСЕЛ

§ 1. Русловые процессы и динамическая классификация русел

Процессы взаимодействия потока и русла, приводящие к изменениям формы и размеров последнего, к его поперечному перемещению, врезанию или поднятию за счет заиления, называются русловыми процессами. Под русловыми процессами понимают также и перемещение аккумулятивных русловых образований: побочней, кос, донных гряд и т. д. Главной характеристикой руслового процесса является общая направленность деформаций: размыв, заиление, динамически устойчивое состояние русла. Направленность процесса определяется соотношением между расходом наносов и транспортирующей способностью потока.

Формирование русла является саморегулируемым процессом, причем регулирование осуществляется через транспортирующую

способность потока. Размыв, происходящий при недогрузке потока наносами, приводит к увеличению глубины, благодаря чему уменьшается скорость течения, а вместе с ней и транспортирующая способность потока. Когда фактический расход наносов приходит в соответствие с транспортирующей способностью, размыв прекращается. При заилении русла имеет место обратная картина. Русловые процессы активизируются при естественных (включая и сезонные) и искусственных изменениях стока воды и наносов. Равенство фактического расхода наносов транспортирующей способности потока отвечает случаю динамически устойчивого русла, характеризующегося лишь перемещением в русле аккумулятивных образований, трансформацией меандров и т. д.

Теоретические основы русловых процессов рассматриваются в речной гидравлике и составляют один из разделов гидрологии суши. В теории русловых процессов широко используется и геоморфологический подход, применимый при решении вопросов, не связанных с оценкой односторонних деформаций. Расчет последних (общих размывов или заилений) осуществляется при использовании методов гидравлики или методов лабораторного моделирования. Гидравлический расчет деформаций русел включает комплекс вычислений, основанных: 1) на использовании уравнения баланса наносов, называемого иногда уравнением деформации русла (см. главу XIII), 2) на применении чисто гидравлических зависимостей, 3) на использовании соотношений, определяющих транспорт наносов. Теория русловых процессов разработана еще недостаточно и гидравлические и морфологические решения носят лишь приближенный характер.

Рассмотренные выше процессы русловых деформаций являются конкретным выражением взаимодействия потока и русла. Впервые идея о таком взаимодействии была высказана В. М. Лохтиным (1904 г.), а затем поддержана В. М. Родевичем и М. А. Великановым. Однако это взаимодействие понималось в основном как динамическое взаимодействие. Здесь мы особо подчеркиваем, что взаимодействие потока и русла осуществляется прежде всего через взаимообмен наносами.

Интенсивность русловых деформаций зависит от разности между количеством поступающих на тот или иной участок реки наносов и транспортирующей способностью потока, а в случае размыва также и от характера пород, слагающих речное русло.

На основании высказанных соображений может быть дана динамическая классификация речных русел, предусматривающая их разделение на следующие основные типы: 1) устойчивые русла, 2) размываемые, 3) намываемые (иногда удобнее говорить о заиляемых руслах, особенно если намыв происходит за счет мелких фракций наносов), 4) равновесные, или динамически устойчивые, русла, 5) квазиравновесные, или динамически квазиустойчивые, русла.

Первый тип включает русла, сложенные весьма устойчивыми (в отношении эрозии) породами, подвергающиеся лишь слабому размыву даже в условиях значительной недогрузки потока наносами. Этот тип характерен для рек, прокладывающих русло в твердых скальных породах. При отнесении такого русла к типу устойчивого учитывается крайняя медленность его врезания, иногда практически совершенно незаметная. Одной из особенностей первого типа является то, что наиболее интенсивная эрозия происходит не при отсутствии транспорта наносов; а при умеренном транспорте, обусловленном таким поступлением их в поток, которое не достигает транспортирующей способности. Если поступление наносов превышает транспортирующую способность потока, то коренное русло покрывается защитным слоем рыхлого аллювия; такое русло уже относится к намываемому или равновесному типам.

Второй тип русел (размываемых) характерен для участков рек, отличающихся недогрузкой наносами в период наиболее интенсивного стока и протекающих в легко размываемых (обычно рыхлых) грунтах. Указанная недогрузка определяется разностью между транспортирующей способностью потока и фактическим транспортом наносов. Заметим, что в связи с поступлением в поток наносов за счет размыва русла эта разность по длине рассматриваемого участка реки постепенно уменьшается. Размываемые русла характерны для верховьев рек, в том числе и горных, не попадающих в первый тип. Такие русла наблюдаются в нижних бьефах плотин, когда река, потерявшая наносы в водохранилище или в пруду, начинает вновь насыщаться наносами за счет размыва русла. Длина таких размываемых участков русла может достигать десятков и сотен километров. Размываемые русла формируются также и в местах современных тектонических поднятий земной коры.

Зайлемые русла (третий тип) характерны для низовьев и устьевых участков рек, для участков рек, постоянно подпираемых водохранилищами; они имеют место в зонах современных тектонических опусканий земной коры, а также при выходе насыщенных наносами горных рек в предгорья или на равнину.

Равновесные, или динамически устойчивые, русла (четвертый тип), как указано выше, имеют те участки рек, для которых характерно равенство между транспортирующей способностью и фактическим расходом наносов. Здесь русла в среднем не меняют своих высотных отметок, а деформации, носящие более или менее периодический характер, происходят за счет смещений русла в плане и передвижения русловых аккумулятивных образований. Русла средних течений многих рек могут быть отнесены к этому типу.

Нередко процессы размыва или заиления больших участков русла проявляются крайне медленно и в ряде задач такие уча-

стки могут быть отнесены к динамически устойчивым. В других же случаях оказывается необходимым специально выявить тенденцию деформации русла и оценить ее количественно. Поэтому представляется целесообразным выделить такие русла в особый тип, назвав их квазиравновесными, или динамически квазиустойчивыми (пятый тип).

Формы русел выделенных типов отличаются некоторыми специфическими чертами. Так, например, разделение русла на рукава с многочисленными островами и протоками является одним из свойств заиляемого русла. Интенсивно размываемые русла — это врезанные русла обычно со слабо развитыми поймами и устойчивыми очертаниями в плане.

Соотношение между транспортирующей способностью потока и фактическим расходом наносов меняется во времени в связи с изменениями режима реки. Поэтому русло того или иного участка реки только в среднем может быть отнесено к определенному типу, сезонные же изменения режима реки (ее жидкого и твердого стока) могут характеризоваться чередованием процессов размыва и заиления и накладывают определенный отпечаток на форму русла. По-видимому, с сезонными изменениями соотношения между расходом наносов и транспортирующей способностью потока связаны сезонные периодические изменения режима перекатов. Местные факторы, однако, обуславливают то, что зоны намыва и размыва оказываются приуроченными к более или менее определенным участкам реки, где эти перекаты и формируются. Для многих равнинных рек Советского Союза характерна определенная последовательность в ходе стока воды и наносов, поэтому нередко появляется возможность установления однозначной связи между уровнем реки и отметкой гребня переката, что было показано исследованиями Б. В. Полякова, Г. И. Шамова и В. В. Федорова. Необходимо, однако, иметь в виду, что при несоблюдении указанной последовательности эта связь может быть нарушена. Зависимости, установленные для какого-либо переката, не могут переноситься на другую реку и даже на другой перекат той же самой реки. Указанные зависимости применяются для расчета глубин на конкретных перекатах и имеют целью обеспечение судоходства прогностическими данными.

Большой интерес представляет формирование речного русла в плане, и в частности образование речных излучин. Этот вопрос на натурном материале изучался Н. И. Маккавеевым, И. В. Поповым и др. Теоретическое рассмотрение процесса образования речных излучин выполнено В. М. Маккавеевым и И. М. Коноваловым. В лабораториях этот процесс исследовался М. А. Великановым, Н. С. Шарашкиной, А. Ф. Кудряшовым и др.

Взгляды на причины формирования речных меандров, высказанные В. М. Маккавеевым и М. А. Великановым, различающиеся

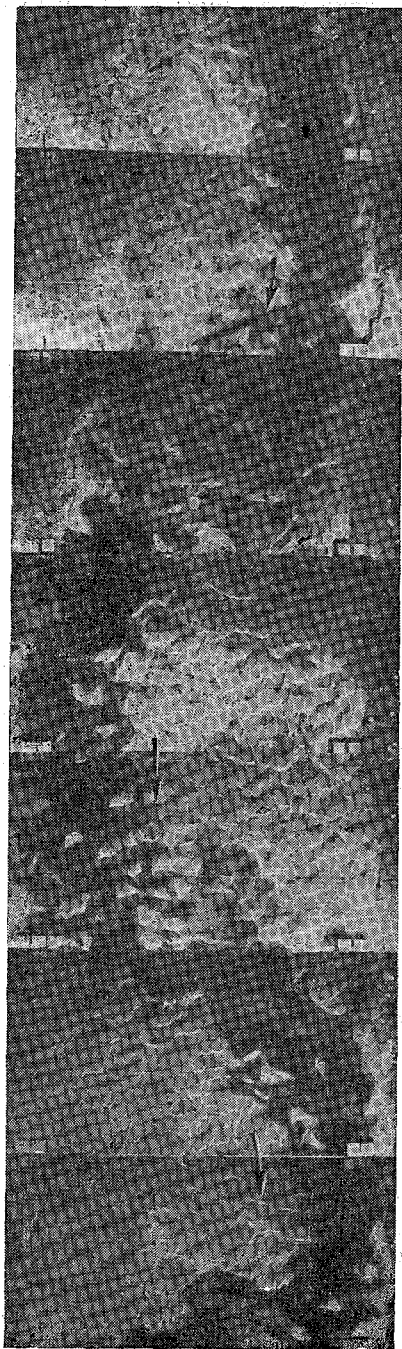


Рис. 14.1. Формирование русла в лаборатории (исследования А. Ф. Кудряшова).

в деталях, в сущности довольно близки и сводятся к тому, что структура самого речного потока уже предопределяет извилистую форму речного русла. В. М. Макавеев теоретически показал, что течение речного потока является неустойчивым, в связи с чем в прямолинейном широком русле возникает извилистость динамической оси потока. Извилистое русло было неоднократно получено в лабораторных условиях (рис. 14.1). На модели воспроизводится паводок, который на первоначально плоском размываемом дне создает извилистую полосу углубления вдоль динамической оси потока, последняя при понижении уровня будет вырабатываться в глубину. В дальнейшем она превращается в извилистое меженное русло.

Общую схему формирования извилистого русла можно изобразить таким образом. Паводочный расход реки в соответствии с режимом твердого и жидкого стока, транспортирующей способностью потока, с топографией и геологией местности вырабатывает русло с весьма неровными очертаниями берегов, характеризующееся чередованием расширений и сужений. На участках расширений вырабатывается извилистое подводное русло, которое при снижении уровней играет роль меженного русла. Степень извилистости послед-

него первоначально определяется только извилистостью динамической оси паводочного потока. В дальнейшем развитие меженного русла и его углубление осуществляется более низкими расходами на спаде и подъеме паводка, а также меженными расходами. Меженный расход производит частичную расчистку русла от скоплений наносов. Во всем этом процессе формирования извилистого русла важнейшую роль играют поперечные течения, получающие существенное развитие как при искривлении динамической оси потока, так особенно в условиях уже возникшей извилистости русла.

Процессы развития речного русла протекают в конкретной физико-географической обстановке, характеризующейся определенным гидрологическим режимом реки, рельефом местности, геологией, количеством и составом поступающих в реку наносов, растительностью на пойме и т. д. Все это приводит к многообразию форм речных русел и пойм. Отсюда вытекает необходимость исследования русловых процессов и форм не только с позиций гидравлики (или гидродинамики), но и с позиций общей гидрологии и геоморфологии. Геоморфологический подход к теории русловых процессов развивается, в частности, в работах Н. И. Маккавеева, Е. В. Шанцера, Н. Е. Кондратьева, И. В. Попова.

При анализе русловых процессов в частности при геоморфологическом их рассмотрении, нередко пользуются понятием «руслоформирующий расход». Это такой расход воды, который связан с транспортом весьма значительного (для данной реки) количества наносов и воздействие которого на речное русло вызывает такой же эффект, как и суммарное воздействие фактически наблюдающихся изменяющихся в течение года расходов воды и наносов. В качестве руслоформирующего расхода воды обычно принимают расход, несколько меньший максимального, соответствующий некоторому превышению потоком уровня кромок поймы.

§ 2. Морфометрические соотношения

Саморегулирование русловых процессов приводит к тому, что определенным видам естественных русловых потоков соответствуют достаточно определенные соотношения между морфометрическими элементами русла, а также между последними и гидравлическим режимом потока.

Большое практическое значение имеет вопрос о соотношении элементов речного русла: его ширины со средней и максимальной глубиной, размера радиуса кривизны русла и длины шага меандров с шириной русла и т. д. В области морфометрии русел наши познания еще весьма ограничены, но имеются некоторые результаты, которыми можно пользоваться. Плодотворной представ-

ляется, однако, предложенная Зидеком (1905 г.) и В. Г. Глушковым (1925 г.) зависимость между шириной и глубиной русла в поперечном профиле.

Формула Глушкова, связывающая ширину русла B с его средней глубиной в поперечном сечении $H_{\text{ср}}$, составлена для уровня, отвечающего кромкам поймы, при расходе, близком к руслоформирующему,

$$\sqrt{B} = kH_{\text{ср}}. \quad (14.1)$$

Здесь $H_{\text{ср}}$ и B выражены в m , величины k для разных грунтов получены различными: для песчаного русла $k=2,7$, для легко-размываемых грунтов $k=5,5$, для скальных пород $k=1,4$.

Рядом ученых исследовался вопрос о взаимной связи размеров русла ($H_{\text{ср}}$ и B) с уклоном и расходом потока (I и Q). В основу этих исследований было положено уравнение равномерного движения потока. Особого внимания заслуживают работы С. И. Рыбкина, С. Т. Алтунина и И. И. Якунина.

Рыбкин на большом натурном материале, относящемся к рекам бассейна Верхней Волги и Оки, получил три гидроморфометрические зависимости для средней ширины русла, средней глубины и средней скорости течения. Из этих зависимостей непосредственно вытекает следующая формула:

$$H_{\text{ср}} = 0,2Q^{0,6}I^{-0,3}B^{-0,6}. \quad (14.2)$$

Зависимость Якунина приводится к виду

$$H_{\text{ср}} = 0,2Q^{0,5}I^{-0,2}B^{-0,5}. \quad (14.3)$$

Столь хорошее согласие формул, полученных эмпирическим путем различными авторами и на различном материале, является весьма примечательным. Оно свидетельствует о том, что обе эти формулы, по-видимому, достаточно близки к соотношениям, имеющим место в природе. К этому следует добавить определенную близость между формулами Алтунина и Рыбкина и результат, полученный Гринбергом, подтверждающий соотношения Рыбкина и Якунина.

Из упомянутых выше соотношений Рыбкина выводится следующая формула средней скорости течения:

$$v_{\text{ср}} = 20H_{\text{ср}}^{0,7}I^{0,5}B^{0,1}. \quad (14.4)$$

Эта формула отвечает условиям равномерного движения речного потока. Как известно, скорость при равномерном движении выражается формулой Шези—Маннинга

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} H_{\text{ср}}^{2/3} I^{1/2}.$$

При сравнении этой формулы с зависимостью (14.4) приходим к весьма своеобразному соотношению для коэффициента шероховатости

$$n = 0,05 H_{\text{ср}}^{-0,04} B^{-0,1}, \quad (14.5)$$

которое должно рассматриваться как приближенное и относящееся к потокам, формирующим свою шероховатость в условиях вполне определенного гидрологического режима и состава донного аллювия. Самоформирование шероховатости обусловлено вымывом мелких фракций из донных отложений и сохранением в них частиц вполне определенного гранулометрического состава, а также образованием определенных очертаний русла в плане и в продольном профиле, от которых также, как известно, зависит коэффициент шероховатости. Такой процесс формирования шероховатости приводит к тому, что последняя оказывается зависящей более или менее определенным образом от гидравлических элементов потока.

Теперь рассмотрим одну из формул, определяющих радиус кривизны r меженного русла речного потока. Эта формула предложена Н. И. Маккавеевым и имеет вид

$$r = \frac{0,0014 \sqrt{Q_p}}{I_p}. \quad (14.6)$$

Здесь Q_p — руслоформирующий расход, I_p — уклон водной поверхности при этом расходе. Н. И. Маккавеев приводит специальную зависимость для вычисления Q_p . Формула (14.6) составлена на основании обобщений очень большого натурального материала. Позже она получила новое обоснование в работе В. М. Маккавеева, который теоретически показал, что имеет место следующая приближенная пропорциональность:

$$r \sim \frac{Q^{0,6}}{I^{0,9}},$$

довольно хорошо согласующаяся с эмпирической формулой (14.6).

Посредством подстановки по Шези формулу Н. И. Маккавеева можно преобразовать и придать ей следующий вид:

$$r = \frac{0,0014 B^{0,5} H_{\text{ср}}^{1,8}}{v_{\text{ср}}^{1,5} n^2}, \quad (14.7)$$

где n — коэффициент шероховатости; все элементы относятся к руслоформирующему расходу. Формула (14.7) показывает, что в потоках с одинаковой скоростью течения радиус кривизны тем больше, чем больше размеры поперечного сечения русла (его

глубина и ширина) и чем меньше коэффициент шероховатости. Заметим, что А. Н. Кощеев при лабораторном исследовании обтекания полузапруд в речных потоках установил, что чем выше шероховатость русла, тем больше кривизна линий тока струи, обтекающей полузапруду, что качественно согласуется с формулой (14.7).

§ 3. Продольный профиль динамически устойчивого русла

Задача о продольном профиле динамически устойчивого русла может быть решена на основе принципиальных положений, изложенных в § 1 настоящей главы. Эта задача является весьма сложной, поэтому ниже будет рассмотрен лишь наиболее простой случай динамически устойчивого русла бесприточного участка реки. Решение может быть использовано для оценки тенденции развития фактически существующего продольного профиля того или иного участка реки в ее бытовом состоянии или в условиях выправления (обвалования, искусственного сужения русла и т. д.).

На бесприточном участке реки динамически устойчивое русло может иметь место в том случае, если в период половодья, являющийся основным периодом руслоформирования, действительный расход наносов $P_{Sд}$ будет оставаться неизменным по длине рассматриваемого участка реки и в то же время будет равным транспортирующей способности потока при данном составе транспортируемых наносов. Если через P_S обозначить расход наносов, отвечающий транспортирующей способности потока при руслоформирующем расходе воды Q_p , то для указанных условий можно написать

$$\left. \begin{aligned} P_{Sд} &= P_S; \\ \frac{dP_S}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

где x — продольная ось реки.

Выражая P_S через элементы потока и русла, запишем формулу

$$P_S = k_* H^\alpha I^\beta (D_a U)^{-\psi} Q_p, \quad (14.9)$$

в которой H — средняя глубина потока на участке, I — уклон водной поверхности, D_a — средний диаметр частиц верхнего (активного) слоя русловых донных отложений, U — средняя гидравлическая крупность транспортируемых потоком наносов. Содержащиеся в формуле показатели степени α , β и ψ , а также коэффициент k_* принимаются согласно одной из существующих формул транспортирующей способности потока. Для условий конкретной реки эти величины могут быть установлены и эмпирическим путем.

По длине бесприточного участка реки происходит измелчение транспортируемых наносов и донных отложений. Одним из первых исследователей этого процесса был Штернберг, предложивший формулу, определяющую измелчение в зависимости от пути частицы вдоль потока x . Согласно Штернбергу, можно написать

$$D_a = D_{a0} e^{-mx}, \quad (14.10)$$

где m — величина, находящаяся опытным путем, а D_{a0} — средний диаметр активного слоя русла на начальном створе рассматриваемого участка реки (при $x=0$).

Гидравлическая крупность крупных частиц наносов, как было показано в предыдущей главе, связана с диаметром частиц следующей пропорциональностью:

$$D \sim U^2,$$

поэтому интенсивность уменьшения гидравлической крупности крупных частиц наносов по длине x , обусловленную истиранием, можно выразить зависимостью

$$U = U_0 e^{-\frac{m}{2}x}. \quad (14.11)$$

Теперь формуле (14.9) можно придать вид

$$P_S = k_* H^\varphi I^\beta (D_{a0} U_0)^{-\psi} Q_p e^{\eta x}, \quad (14.12)$$

где

$$\eta = \psi \left(m + \frac{m}{2} \right).$$

Если через z обозначить отметки свободной поверхности, то производная $\frac{dz}{dx}$ будет выражать уклон свободной поверхности потока I , который для потока с динамически устойчивым руслом изменяется вдоль оси x по определенному закону.

Продольный профиль потока выражается дифференциальным уравнением

$$dz = I(x) dx. \quad (14.13)$$

Функция $I(x)$ может быть найдена из условия постоянства P_S вдоль x

$$I = \frac{(D_{a0} U_0)^{\psi/\beta}}{H^{\frac{\varphi}{\beta}} e^{\frac{\eta}{\beta} x}} \left(\frac{P_S}{k_* Q_p} \right)^{1/\beta}. \quad (14.14)$$

Предположение о постоянстве P_S и Q_p вдоль x позволяет принять

$$\left(\frac{P_S}{k_* Q_p} \right)^{1/\beta} = \text{const} = k;$$

вводя обозначения

$$\nu = \frac{\psi}{\beta}; \quad \mu = \frac{\varphi}{\beta}; \quad \xi = \frac{\eta}{\beta},$$

приходим к следующей записи дифференциального уравнения продольного профиля:

$$dz = k(D_{a0}U)^\nu H^{-\mu} e^{-\xi x} dx. \quad (14.15)$$

Величины, относящиеся к начальному профилю (обозначенные индексом «0») являются в уравнении постоянными. Все постоянные можно объединить и обозначить через A_0 , т. е. принять

$$A_0 = k(D_{a0}U_0)^\nu,$$

что приводит к следующей записи дифференциального уравнения продольного профиля бесприточного участка реки с динамически устойчивым руслом:

$$dz = A_0 H^{-\mu} e^{-\xi x} dx. \quad (14.16)$$

Если коэффициент k известен, то величина A_0 вычисляется по параметрам наносов на начальном профиле участка. В противном случае она может быть найдена непосредственно из уравнения (14.16) при отнесении всех входящих в него величин к начальному профилю.

Заметим, что некоторые натурные данные позволяют ориентировочно принять $\mu \approx 0,2$ и $\xi \approx 0,00001$ и получить в связи с этим следующее уравнение:

$$dz = A_0 H^{-0,2} e^{-0,00001x} dx, \quad (14.17)$$

дающее самое общее представление о форме продольного профиля динамически устойчивого русла (на бесприточном участке) и применимое к конкретным случаям лишь с известной осторожностью.

§ 4. Расчет деформаций русла при наличии данных о мутности потока

Исследование условий взвешивания и осаждения наносов в придонном слое потока привело к получению следующего выражения результирующего вертикального секундного расхода наносов через единицу поверхности русла q_{SH} :

$$q_{SH} = \frac{\omega}{2}(S_H - \Phi S_{взм})(1 + \epsilon). \quad (14.18)$$

Эта формула подробно рассмотрена в главе XIII, там же даны соотношения для вычисления входящих в формулу величин.

Для упрощения решения принимаем, что наносы являются однородными по гранулометрическому составу. В соответствии с этим величина q_{SH} будет выражать полный единичный расход наносов. Безразмерный параметр ε , непосредственно входящий в формулу (14.8) и являющийся аргументом содержащейся в формуле функции Φ , находится в рассматриваемом случае по среднему значению гидравлической крупности наносов U

$$\varepsilon = \frac{U}{w},$$

где w — среднее значение абсолютной величины вертикальной составляющей пульсационной скорости у дна потока.

Результирующий вертикальный расход наносов определяет деформацию русла. Положительный расход $+q_{SH}$ направлен вниз, а отрицательный $-q_{SH}$ — вверх, поэтому при $q_{SH} > 0$ имеет место заиление, а при $q_{SH} < 0$ — размыв русла. При $q_{SH} = 0$ русло динамически устойчиво.

Рассмотрим размерность величины q_{SH} . Если мутность выражается в относительных объемных единицах $\left(\frac{m^3 \text{ тв. вещества}}{m^3 \text{ жидкости}} \right)$,

то

$$|q_{SH}| = \frac{m^3}{m^2 \text{ сек}};$$

здесь в m^3 выражен объем твердого материала, т. е. суммарный объем частиц наносов, поступающих на поверхность русла или смываемых с поверхности русла в поток. Размерность q_{SH} можно написать и так:

$$|q_{SH}| = \frac{m}{\text{сек}}.$$

Таким образом, получаем размерность скорости. В соответствии с этим q_{SH} будем называть условной скоростью деформации русла. Чтобы получить истинную скорость деформации и фактические размеры размывов и намывов в секунду, надо учесть пористость грунта Δ ; эта величина показывает объем пор в единице объема грунта.

Приращение отметки (высоты) дна Δh за некоторый интервал времени Δt выразится соотношением

$$\Delta h = \frac{q_{SH} \Delta t}{1 - \Delta}. \quad (14.19)$$

Величина Δh измеряется в m . При расчете деформации q_{SH} находится по формуле (14.18). Разность $1 - \Delta$ выражает объем твердых частиц в единице объема грунта. Обычно пористость грунта характеризуется значениями $\Delta = 0,3 \div 0,5$. Пористость и величина разности $1 - \Delta$ могут быть найдены по удельному весу

частиц наносов γ_s и объемному весу грунта γ_r (см. табл. Г. А. Петуховой в предыдущей главе). Заметим, что γ_r выражает вес единицы объема грунта без воды, но в естественном его уплотнении. Из элементарных соображений нетрудно получить

$$1 - \Delta = \frac{\gamma_r}{\gamma_s}. \quad (14.20)$$

Формулы (14.18) и (14.19) позволяют вычислить деформации русла на любой вертикали, если известны глубина H , скорость течения v , средняя крупность взвешиваемых фракций донных отложений и донная мутность S_H .

Даже при установившемся режиме потока S_H сильно меняется во времени, поэтому рассматриваемый метод дает в некоторой степени случайные деформации, выявляющие лишь расположение зон размыва и заиления.

Содержащаяся в формуле (14.18) величина $S_{взм}$ вычисляется по формуле

$$S_{взм} = aN \frac{v_H^2}{H}, \quad (14.21)$$

где a — коэффициент, находимый по данным измерений мутности на рассматриваемом участке реки.

При расчете деформаций русла надо принимать во внимание следующее условие: величина $S_{взм}$ не может быть меньше S_H ; таким образом, в условиях конкретного потока S_H является наименьшим возможным значением $S_{взм}$. Если вычисленное по формуле значение $S_{взм}$ оказывается меньше S_H , то при расчете деформации русла надо взять $S_{взм} = S_H$. Для этого предельного случая выражение q_{SH} получает вид

$$q_{SH} = uS_H. \quad (14.22)$$

Далее следует учитывать, что деформации Δh приводят к изменению глубины потока, т. е. если в начальный момент времени при $t=0$ глубина $H=H_1$, то при $t=\Delta t$ глубина $H=H_1 - \Delta h$. При размыве Δh получается отрицательным. Поскольку в этом случае глубина возрастает, перед Δh поставлен знак минус.

С изменением глубины изменяется гидравлика потока, поэтому расчетный интервал Δt , принимаемый одинаковым для всего участка реки, должен назначаться небольшим с тем, чтобы вычисляемые значения Δh нигде не получались больше $1/4 \div 1/6$ от первоначальной глубины H .

Теперь остановимся на способе определения коэффициента a в формуле мутности взмыва. Этот коэффициент при решении поставленной задачи находится по данным измерения мутности потока, скоростей течения, глубин и уклона I на участке реки. Определяются средние для рассматриваемого участка значения поперечного профиля потока $\omega_{ср}$ и глубины $H_{ср}$. Вычисляется

средняя скорость течения делением расхода воды Q на $\omega_{\text{ср}}$ и далее по формуле Шези с использованием уклона I находится коэффициент C . Находится среднее значение измеренной мутности потока $S_{\text{ср. изм}}$, которое принимается за мутность, отвечающую транспортирующей способности потока $S_{\text{тр}}$. Имея все эти данные, можно, воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{a} S_{\text{ср. изм}} = S_{\text{тр}} = S_{\text{взм}} \Gamma, \quad (14.23)$$

вычислить $S_{\text{взм}}$, а затем найти и коэффициент a ; очевидно, что

$$a = \frac{S_{\text{ср. изм}}}{\Gamma} \cdot \frac{H_{\text{ср}}}{N v_{H \text{ ср}}^2}. \quad (14.24)$$

Здесь $v_{H \text{ ср}}$ — средняя для участка донная скорость потока, полученная путем умножения $v_{\text{ср}}$ на η ; N — безразмерная величина, определяемая по формуле

$$N = \frac{MC}{g}.$$

Способ вычисления гидромеханического параметра наносов Γ изложен в главе XIII.

Подставив найденное таким образом значение a в формулу мутности взмыва (14.21) и произведя расчет деформаций русла изложенным выше методом, получаем возможность определить зоны местного размыва и местного заиления в пределах рассматриваемого участка реки.

Изложенный метод расчета отличается большой наглядностью, практическое же его значение невелико, поскольку для его использования необходимы детальные планы поля донной мутности, получить которые в натуре довольно трудно, при этом такие планы очень быстро становятся устаревшими. Заметим, что рассматриваемые ниже в настоящей главе методы расчета русловых деформаций практически вполне рациональны и широко применяются при проектировании.

Расчет русловых деформаций при наличии достаточных натурных данных о мутности и гранулометрическом составе взвешенных и донных наносов может быть выполнен при использовании графиков, построенных по схеме, предложенной К. И. Росинским и И. А. Кузьминым (см. § 7 главы XIII). Эти графики выражают зависимость значений мутности руслоформирующих, а также и мелких фракций от аргумента $\left(\frac{v_{\text{ср}}}{H^{0,33}_{\text{ср}}} \right)$; причем за ос-

новной график, выражающий транспортирующую способность потока, принимается верхняя огибающая кривая.

Рассматриваемая часть реки делится на расчетные участки, длина которых принимается равной примерно удвоенной ширине

потока. Получив значения аргумента $\frac{v_{\text{ср}}}{H^{0,33}_{\text{ср}}}$ для каждого расчет-

ного участка, находят по графику величины мутности, отвечающие руслоформирующим фракциям $s_{p, \phi}$, и относят их к концам расчетных участков.

Деформация русла в пределах участков вычисляется следующим образом. Находится разность мутности между концом предыдущего участка (совпадает с началом рассматриваемого участка) и концом рассматриваемого участка. Пусть эта разность равна $(\pm) \Delta s_{p, \phi}$. Умножив $\Delta s_{p, \phi}$ на расход воды Q , получают количество наносов, выпавших на дно участка или смытых с дна участка в секунду. Выбрав расчетный интервал времени Δt и умножив найденную величину на Δt , находят деформацию за счет руслоформирующих фракций за время Δt . Аналогичным образом определяется деформация за счет мелких фракций. Общая деформация на участке находится как сумма деформаций за счет руслоформирующих и мелких фракций.

Изменение средней на участке отметки дна, т. е. величина размыва или заиления, находится путем деления общей деформации на площадь зеркала расчетного участка и введения коэффициента, учитывающего плотность грунта. Заметим, что метод Россинского и Кузьмина часто применяется и для расчета заиления водохранилищ.

§ 5. Общие деформации русла при понижении базиса эрозии

Если уровень моря или озера, в которое впадает река, снижается по той или иной причине и если имеет место большой уклон подводного берегового склона, то на нижнем участке реки образуется кривая спада с характерным для нее увеличением продольного уклона и скорости течения. В зоне спада возрастает транспортирующая способность и будет наблюдаться размыв русла. Участок размыва будет продвигаться постепенно вверх по реке. Эту картину можно получить путем теоретического расчета.

Рассмотрим весьма распространенный случай, когда до начала снижения базиса эрозии реки ее русло было динамически устойчивым. Далее будем принимать, что деформации происходят таким образом, что форма поперечного сечения русла не изменяется: оно перемещается параллельно самому себе вниз (при размыве) или вверх (при заилении) на величину δh . Это предположение подтверждается некоторыми данными натурных исследований.

При выполнении расчета рассматриваемую реку делят на расчетные участки подобно тому, как поступают при построении кривой свободной поверхности. Эти расчетные участки должны избираться достаточно длинными (не менее пяти-семикратной

ширины), чтобы на протяжении каждого из них фактический расход наносов мог приближенно прийти в соответствие с транспортирующей способностью потока, отвечающей средним условиям течения на данном расчетном участке. Транспортирующая способность потока, вычисленная по средним гидравлическим характеристикам расчетного участка, принимается равной фактическому расходу наносов в конце расчетного участка.

На рис. 14.2 изображена схема продольного профиля реки. Римскими цифрами обозначены номера расчетных участков. Цифрами 1 и 2 обозначены соответственно кривые свободной поверхности, отвечающие определенному расходу Q при первоначальном положении базиса эрозии ζ_{00} и при новом его положении ζ_{01} . Снижение от ζ_{00} до ζ_{01} произошло за расчетный интервал

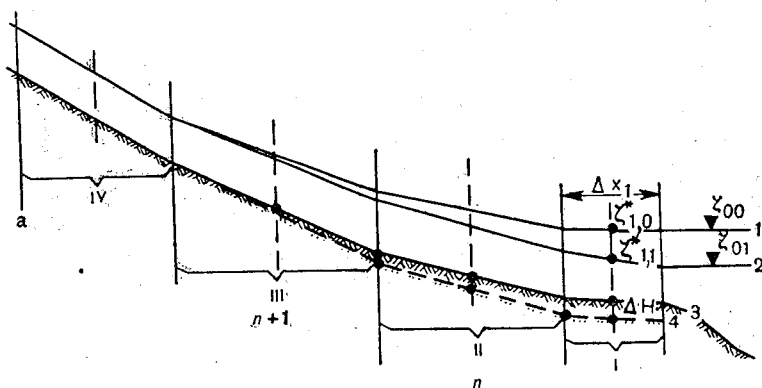


Рис. 14.2. Продольный профиль русла и свободной поверхности реки (к расчету деформаций при снижении базиса эрозии).

времени Δt_j . Осредненный профиль поперечного сечения потока, а следовательно, и все гидравлические элементы расчетных участков мы относим к серединам этих участков (на рисунке середина участка показана пунктирной линией), расходы же наносов P_S будем относить к концам расчетных участков. Объем стока наносов за интервал Δt_j в конце участка I будет

$$W_{Ij} = P_{SIj} \Delta t_j, \quad (14.25)$$

где P_{SIj} — расход наносов на замыкающем створе участка I при значениях гидравлических элементов, полученных для начала интервала Δt_j ; P_{SIj} вычисляется по теоретической формуле, рассмотренной в главе XIII, § 7. Заметим, что если имеются данные по расходам наносов реки, полученные до снижения базиса эрозии, то в формулу следует ввести поправочный множитель, вычисляемый как частное от деления действительного расхода на вычисленный. Не следует забывать при этом, что расходы нано-

сов, выраженные в весовых единицах, необходимо предварительно перевести в относительное объемное выражение.

Обозначим через ΔW разность между объемами стока наносов на данном расчетном участке, отвечающими данному интервалу времени при измененных условиях и при первоначальных условиях протекания. Например, для интервала Δt_j на участке I будем иметь

$$\Delta W_{Ij} = W_{I,0} - W_{Ij}, \quad (14.26)$$

где $W_{I,0}$ — объем стока наносов за время Δt при бытовых условиях, W_{Ij} — объем стока наносов за время Δt при измененных условиях.

Положительные разности ΔW показывают на наличие заиления русла реки выше замыкающего створа участка, отрицательные свидетельствуют о размыве.

Объем деформации на участке I за интервал времени Δt_j определится разностью величин ΔW_{Ij} и ΔW_{IIj} , причем первая величина относится к замыкающему створу расчетного участка I , а последняя — к замыкающему створу расчетного участка II . Получение фактического объема деформации требует, кроме того, учета пористости грунта Δ .

Изменения средних отметок (средних уровней) дна соответственно на расчетных участках I и II за время Δt определится формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_{Ij} &= \frac{\Delta W_{Ij} - \Delta W_{IIj}}{(1 - \Delta) \Omega_{Ij}}; \\ \Delta h_{IIj} &= \frac{\Delta W_{IIj} - \Delta W_{IIIj}}{-(1 - \Delta) \Omega_{IIj}} \end{aligned} \right\} \quad (14.27)$$

где Ω_{Ij} и Ω_{IIj} — площади зеркала реки на участках I и II в начале интервала Δt_j . Для остальных расчетных участков записываются аналогичные формулы.

Расчет выполняется последовательно от участка к участку снизу вверх по течению. Закончив расчет для всей интересующей нас части реки для первого интервала времени, выполняем в этой же последовательности расчет для второго интервала и т. д.

Подготовительные расчеты заключаются в вычислениях (с последующим построением графиков) модуля сопротивления F , коэффициента Шези C и других величин, изменяющихся с изменением уровня и необходимых для построения кривой свободной поверхности реки и расчета транспортирующей способности на участках при разных расходах. При получении существенных деформаций русла кривая свободной поверхности реки перестраивается.

Получаемые расчетным путем изменения уровня дна Δh после первого этапа, а в дальнейшем суммарные деформации δh , полученные для всех предыдущих n интервалов на участках по формуле

$$\delta h = \sum_{j=1}^n \Delta h_j; \quad (14.28)$$

должны учитываться при снятии значений F , C , B и т. д. с упомянутых графиков. Учет осуществляется соответствующими вертикальными перемещениями шкалы ординат ζ^* этих графиков (ζ^* — средний уровень на участке).

§ 6. Деформации на больших участках русла в нижнем бьефе гидроузла

Речные потоки, проходя через большие водохранилища, практически полностью осаждают содержащиеся в них наносы, и в нижний бьеф поступает чистая (осветленная) вода, где происходит постепенное насыщение ее наносами. Это насыщение приводит к размывам русла, которые могут быть весьма значительными и обычно распространяются на большие расстояния от плотины. Процесс переформирования русла на коротком участке нижнего бьефа непосредственно у плотины представляется более сложным. Ниже рисбермы наблюдается весьма интенсивный размыв с образованием ямы размыва, причем наиболее крупный материал размыва откладывается в непосредственной близости от ямы.

Здесь нас будут интересовать только общие деформации на больших участках нижнего бьефа протяженностью до десятка и более километров. Такой подход позволяет приблизительно оценить процесс врезания русла в нижнем бьефе. Следует иметь в виду некоторые сопутствующие явления, неучет которых может повести к ошибочной оценке не только интенсивности, но даже и направленности процесса деформации. В частности, надо учитывать следующую возможность. Паводки главной реки могут полностью задерживаться или сильно уменьшаться водохранилищем, а на паводки притоков, впадающих ниже плотины, водохранилище не влияет, они остаются неизменными, поэтому уклоны в устьях притоков во время паводков оказываются увеличенными.

В связи с образованием на притоках кривой спада происходят размывы в устьях притоков с выносом материала в главную реку. Учесть при расчете это добавочное поступление твердого материала в нижний бьеф можно путем специального расчета деформации русла притоков с использованием изложенного выше метода расчета деформации при понижении базиса эрозии. Снижение уровня главной реки в паводок для каждого из притоков

можно трактовать, как снижение его базиса эрозии в период паводка.

Для пояснения схемы расчета деформации русла в нижнем бьефе рассмотрим лишь простейший случай, когда на более или менее значительном протяжении нижнего бьефа отсутствуют притоки. Используя, однако, в более сложном случае излагаемый здесь метод в сочетании с методом, рассмотренным в предыдущем параграфе, мы можем решить задачу о деформациях в нижнем бьефе при наличии притоков, выносящих наносы. Так же как и в предыдущем случае, примем условие о неизменности формы поперечного профиля русла при размыве.

Разобьем реку на расчетные участки, нумеруя их уже сверху вниз по течению, считая за первый — участок, примыкающий к гидроузлу. Створ гидроузла, совпадающий с началом расчетного участка I , назовем начальным. Пусть задан гидрограф для начального створа. Разбиваем гидрограф по времени на ряд интервалов Δt и определяем для каждого интервала средний расход Q .

Расчет выполняется последовательно, от интервала к интервалу. При этом внутри каждого интервала вычисления выполняются от участка к участку, аналогично тому, как мы поступали в предыдущем случае.

Предположим, что расчет ведется для j -го интервала, когда средний расход равен Q_j . Строим кривую свободной поверхности реки при данном расходе, продвигаясь от нижнего расчетного участка к плотине. Получив кривую свободной поверхности, мы тем самым определим гидравлику каждого участка при заданном расходе.

Исходя из предположения, что расчетные участки достаточно длинны, а гидравлические элементы меняются скачкообразно от участка к участку, сохраняясь неизменными на протяжении каждого из участков, будем считать неизменной и транспортирующую способность потока вдоль каждого из участков. Одновременно будем принимать, так же как и в предыдущем случае, что расход наносов в конце участка приходит в соответствие с транспортирующей способностью потока на рассматриваемом участке.

Основными граничными условиями в данной задаче являются: нулевой расход наносов через начальный створ и заданный гидрограф на нем.

Таким образом, если вычисленный расход наносов в конце расчетного участка I для интервала j будет равен P_{SIj} , то при учете первого граничного условия общий объем деформации (размыва) на участке I за время Δt_j будет

$$\Delta V_{Ij} = - \frac{P_{SIj} \Delta t_j}{(1 - \Delta)} ; \quad (14.29)$$

здесь знак минус показывает размыв. На участке II

$$\Delta V_{IIj} = \frac{(P_{SIj} - P_{SIIj}) \Delta t_j}{(1 - \Delta)}.$$

При размыве $P_{SIIj} > P_{SIj}$ и объем деформации получается отрицательным. Для участка III записывается аналогичное соотношение и т. д.

Изменение средних отметок дна за время Δt_j вычисляется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_{Ij} &= \frac{\Delta V_{Ij}}{\Omega_{Ij}} = - \frac{P_{SIj} \Delta t_j}{(1 - \Delta) \Omega_{Ij}}; \\ \Delta h_{IIj} &= \frac{(P_{SIj} - P_{SIIj}) \Delta t_j}{(1 - \Delta) \Omega_{IIj}} \end{aligned} \right\} \quad (14.30)$$

и т. д.

Получив изменение отметок дна всех участков, приступают к расчету деформации для следующего интервала Δt_{j+1} , при этом построение кривой свободной поверхности для второго интервала времени выполняется с учетом понижения уровня дна на величину Δh_j , а для последующих интервалов — при учете снижения дна на соответствующие суммы вертикальных деформаций, выражаемые через δh . На эту величину следует поднимать шкалу ординат ζ^* графика модуля сопротивления $F(\zeta^*)$.

§ 7. Детальные методы расчета русловых деформаций на коротких участках реки

Детальный расчет русловых деформаций на коротком участке реки может быть выполнен при использовании общего дифференциального уравнения турбулентной диффузии и соотношения, определяющего граничные условия. Последнее находится непосредственно из выражения результирующего вертикального расхода q_s . Решение уравнения выполняется методом конечных разностей. В результате расчета находится поле мутности рассматриваемого участка реки и распределение значений q_s по всей поверхности русла. Русловые деформации, определяемые величинами $\pm \Delta h$, вычисляются непосредственно по q_s .

Этот способ расчета деформации русла, рассмотренный в ряде работ автора, является, однако, весьма трудоемким и может применяться лишь в особых случаях, когда требуется большая детализация. Трудоемкость метода, вообще говоря, не оправдывает себя, так как точность расчета деформации получается небольшой ввиду того, что оказывается затруднительным учесть ряд существенных факторов, таких, например, как поперечные течения, изменение состава наносов в процессе деформации и т. д.

Для детального расчета деформаций русла может быть предложен менее трудоемкий метод расчета, основанный на приведенном в главе XIII приближенном уравнении продольного распределения мутности. Опыт расчета показал достаточную удовлетворительность этого метода. Указанное уравнение имеет следующий вид:

$$S_{\text{кон}} = S_{\text{тр}} + (S_{\text{нач}} - S_{\text{тр}}) e^{-\frac{B(u_{\text{ср}} + k)}{Q} \Delta x}. \quad (14.31)$$

Здесь Δx — длина расчетного элемента потока. Уравнение применяется для транзитных струй.

Для рассматриваемого участка реки предварительно строится план течений по натурным данным, по методу Н. М. Бернадского или другим способом, позволяющим разделить поток на транзитные струи. Элементы струй, заключенные между ортогональными поперечниками плана течений, принимаются за расчетные.

Если на начальном поперечнике для всех транзитных струй потока задать значения мутности, вычисляя ее, например, по формуле транспортирующей способности, то, пользуясь уравнением (14.31), можно вычислить значения мутности для каждого последующего поперечника вдоль всех струй.

Получив значения $S_{\text{кон}}$ для каждого элемента, переходим к расчету русловых деформаций на этих элементах. Расчет выполняется по формуле

$$\Delta h = \frac{q_s \Delta t}{(1 - \Delta)},$$

где Δh — деформация дна в конце расчетного элемента, Δt — расчетный интервал времени, Δ — пористость грунта, q_s — результирующий вертикальный секундный расход наносов через единицу поверхности дна в конце расчетного элемента Δx . Эта величина находится по формуле

$$q_s = (u_{\text{ср}} + k) S_{\text{кон}} - k S_{\text{взм}}.$$

Здесь $S_{\text{взм}}$ — мутность взмыва, вычисленная для элемента транзитной струи, $S_{\text{кон}}$ — средняя мутность в конце элемента Δx , найденная по формуле (14.31).

Если для рассматриваемого интервала времени Δt деформации Δh оказываются значительными (достигают $1/10 \div 1/5$ полной глубины на вертикали), то подсчет для последующего интервала требует нового построения плана течений, производимого с учетом полученных изменений глубин на элементарных участках русла и соответствующего смещения урезов воды. При выполнении расчетов в дальнейшем учитываются суммарные деформации δh .

Рассмотренный выше метод расчета деформации русла может быть непосредственно применен к расчету заносимости дноуглубительной судоходной прорези, к расчету деформаций в нижнем бьефе и т. д.

Допустим, что имеем случай, когда дноуглубительная прорезь расположена вдоль линий тока на сравнительно прямолинейном участке реки. Разработка дноуглубительной прорези ведет к существенному изменению гидравлики реки на участке расположения прорези, а также выше и ниже ее. Построение кривой свободной поверхности и плана течений для измененных условий позволяет достаточно полно характеризовать гидравлику потока после разработки прорези.

С изменением гидравлики связано и изменение транспортирующей способности потока. В частности, при разработке прорези имеет место увеличение глубины, уменьшение скорости течения и транспортирующей способности. Очевидно, что если после разработки прорези транспортирующая способность на выше расположенном участке не изменилась или несколько увеличилась за счет увеличения уклона, а на участке прорези она уменьшилась, то на последнем должно начаться осаждение наносов. Наиболее интенсивное осаждение, как правило, будет иметь место в самой прорези, но оно будет наблюдаться также и на примыкающих участках русла — справа и слева от прорези. Расчет заиления прорези следует производить путем разделения потока на три струи (струя вдоль прорези, струи слева и справа от нее) и расчета деформации вдоль каждой из этих струй изложенным выше методом.

Некоторое упрощение способа расчета получается, если на участках боковых струй не происходит существенных деформаций, которые могли бы привести к изменению гидравлики струи над прорезью. Последнее выясняется пробными подсчетами. Расчет заносимости прорези в этом случае допускается вести изолированно от соседних струй.

Изложенный способ расчета основан на использовании осредненного значения гидравлической крупности транспортируемых наносов (u_{cp}) и дает сразу величины общей мутности и осаждения всех транспортируемых наносов. При большом диапазоне изменения крупности наносов такой способ является слишком грубым и следует вести расчет по фракциям. Обычно в инженерной практике используется метод, предусматривающий разделение наносов на фракции. При этом приведенные выше формулы, сохраняя свой вид, содержат значения частной мутности s_i и крупности u_i отдельных фракций наносов. Деформации получаются путем суммирования результатов, получаемых по фракциям.

§ 8. Методика расчета заиления водохранилищ

В основе методики расчета заиления водохранилищ лежит метод баланса наносов, заключающийся в оценке прихода и расхода наносов для водохранилища и получения заиления по разности между этими величинами. Приход наносов в водохранилище

оценивается по данным о стоке наносов рек (или одной реки), питающих водохранилище, с учетом его внутригодовой и многолетней изменчивости и гранулометрического состава, поступающих в водохранилище наносов. Оценка расходной статьи баланса основана на определении изменения транспорта наносов по длине водохранилища от его начального створа до конечного. Полученная величина стока наносов в этом конечном створе выражает величину сброса наносов в нижний бьеф.

Характер изменения транспорта наносов по длине водохранилища определяется крупностью транспортируемых наносов, характером изменения глубины, скорости течения и грунтов по длине водохранилища. В соответствии с этим расчет заиления производится по отдельным фракциям транспортируемых наносов с выделением в особую группу фракций, относящихся к так называемым влекомым наносам.

Данные об изменении гидравлических элементов потока (глубины скорости и др.) по длине водохранилища при проектировании последнего могут быть получены только на основании гидравлических расчетов, учитывающих, помимо морфометрических характеристик водохранилища, внутригодовую изменчивость стока воды в начальном створе, регулирующее влияние водохранилища, процесс его наполнения и опорожнения, а также многолетнюю изменчивость стока воды.

Оценка изменения транспорта наносов по длине водохранилища производится по экспоненциальному уравнению, определяющему мутность потока в конечном створе (всего водохранилища или его части) в зависимости от мутности на начальном створе и от среднего значения транспортирующей способности потока на соответствующей части водохранилища. Эти вычисления ведутся для заданного состава наносов и заданных величин гидравлических элементов потока. Из сказанного видно, что расчет заиления водохранилища должен включать оценку транспортирующей способности потока.

Главными задачами расчета заиления являются следующие: 1) оценка срока службы водохранилища (времени заиления его полезной емкости); 2) получение величины общего заиления через заданное число лет; 3) получение распределения отложений по длине водохранилища или на отдельных его участках, в частности, в зоне выклинивания подпора; 4) оценка трансформации кривой подпора.

В зависимости от поставленной задачи и размера водохранилища расчет заиления выполняется для всего водоема в целом, или по участкам, на которые делится водохранилище поперечными сечениями. Такие участки именуется расчетными участками.

Расчет заиления балансовым методом ведется по годам. В случае приближенного решения задачи о заилении балансовый

метод применяется к первому году эксплуатации водохранилища, а для последующих лет применяются упрощенные экстраполяционные зависимости. Примерами методов, использующих такие зависимости, являются широко известные методы Г. И. Шамова и В. С. Лапшенкова.

Расчет для одного года состоит из нескольких этапов, включающих: 1) получение и подготовку исходных данных (сток воды и наносов, их внутригодовые распределение и изменчивость, гранулометрия транспортируемых наносов и донных отложений, топографические данные, характеризующие чашу водохранилища); 2) назначение расчетных интервалов времени при учете режима стока воды и наносов и уровней воды в водохранилище; 3) выделение расчетных участков; 4) гидравлические расчеты для всего водохранилища в целом или по участкам при разных уровнях и расходах воды, отвечающих средним величинам для назначенных расчетных интервалов времени; эти расчеты включают построение кривых свободной поверхности и вычисление средних скоростей течения; 5) расчет транспортирующей способности потока (суммарной и по фракциям); 6) получение расходов наносов (суммарно или по фракциям) на концах расчетных участков; 7) получение на основе баланса наносов значений заиления для расчетных интервалов времени всего водохранилища или по участкам (с пересчетом от весового выражения заиления к объему заиления); 8) получение значений годового заиления на участках по всем фракциям отложившихся наносов.

Расчет заиления для последующих лет, как указывалось, может выполняться таким же образом, как и для первого года, но с учетом изменения глубины, обусловленного заилением, полученным по расчету за предыдущие годы.

При выполнении приближенных расчетов некоторые особенности режима стока воды и наносов не учитываются, в частности, в расчете используется только норма стока наносов, многолетняя же его изменчивость не учитывается.

Расчет осадения взвешенных наносов в водохранилище выполняется при использовании приведенной в § 7 главы XIII теоретической формулы транспортирующей способности потока. Эта формула имеет вид

$$S_{\text{тр}} = \Gamma S_{\text{взм}}, \quad (14.32)$$

где Γ — гидромеханический параметр наносов, $S_{\text{взм}}$ — мутность взмыва, выражаемая в $г/м^3$.

Гидромеханический параметр наносов может быть определен как по составу транспортируемых наносов, так и по составу донных отложений. В последнем случае он находится по формуле

$$\Gamma = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{\text{взм } i}}{100} \Gamma_i, \quad (14.33)$$

причем сумма берется по всем (m) взвешиваемым фракциям донных отложений; Γ_i —частное значение гидромеханического параметра наносов, которое может быть получено для i -той

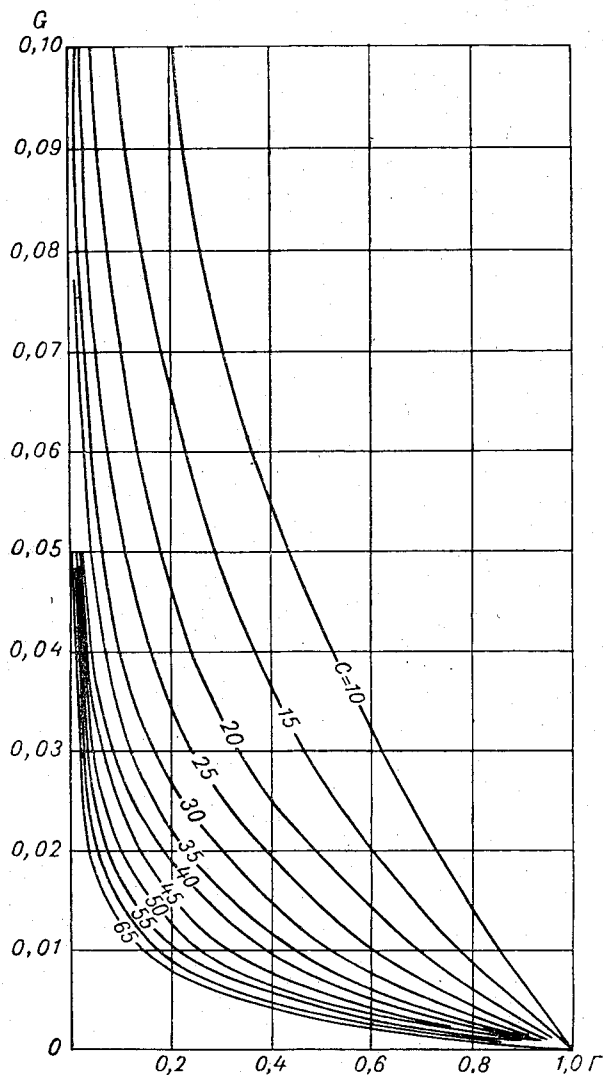


Рис. 14.3. Графики зависимости гидромеханического параметра наносов Γ от коэффициента Шези C и от G .

фракции по графикам, изображенным на рис. 14.3 в зависимости от C и G (эти графики построены по теоретической формуле; подробнее см. в главе XIII).

При детальном расчете заиления водохранилищ представляется необходимой оценка транспортирующей способности потока в отношении отдельных фракций. Так, для i -той фракции средняя частная мутность, отвечающая транспортирующей способности потока с заданными гидравлическими характеристиками и при заданном составе наносов, выражается равенством

$$s_{i \text{ тр}} = \frac{\alpha_i \text{ взм}}{100} \Gamma_i S_{\text{взм}}. \quad (14.34)$$

Расход взвешенных наносов на участках водохранилища вычисляется как произведение $S_{\text{тр}}$ или $s_{i \text{ тр}}$ на расход воды $Q \text{ м}^3/\text{сек}$. $S_{\text{взм}}$ определяется по формуле, дающей эту величину в $\text{г}/\text{м}^3$.

Расчет транспорта наносов, перемещаемых в придонном слое потока, т. е. расчет расхода влекомых наносов, рекомендуется выполнять по формуле Г. И. Шамова (см. главу XIII).

При выполнении расчета заиления водохранилищ в расчетные формулы транспорта наносов вводится поправочный множитель a , приводящий формулу для начального створа в соответствие с данными измерений стока наносов. Только при отсутствии таких данных расчет выполняется непосредственно по формулам транспорта наносов.

Детальный расчет заиления водохранилища выполняется по отдельным участкам, на которые водохранилище делится поперечными сечениями. Начальный створ верхнего расчетного участка совпадает с началом зоны подпора водохранилища, а конечный (последнего участка) совпадает с плотиной. Каждый промежуточный створ является одновременно начальным для расположенного ниже расчетного участка и конечным для выше расположенного участка.

Введем обозначения: Δt_j — расчетный интервал времени в сек., $P_{i \text{ нач } j}$ — сток наносов i -той фракции через начальный створ участка за расчетный интервал; $P_{i \text{ кон } j}$ — то же через конечный створ участка; P_{iaj} — количество наносов (в весовом выражении), аккумулирующихся в водохранилище за время Δt_j . Рассмотренные величины следует выражать в тоннах.

Для первого расчетного участка величина $P_{i \text{ нач } j}$ находится по данным о стоке наносов с учетом его внутрigoдового распределения и гранулометрического состава транспортируемых наносов. При отсутствии данных о стоке наносов величина $P_{i \text{ нач } j}$ вычисляется для интервала Δt_j по формуле транспортирующей способности для условий бесподпорного движения.

Отложения за интервал Δt_j на участке вычисляются по следующему уравнению баланса наносов:

$$P_{iaj} = P_{i \text{ нач } j} - P_{i \text{ кон } j}. \quad (14.35)$$

Величина $P_{i \text{ кон } j}$ находится по формуле

$$P_{i \text{ кон } j} = s_{i \text{ кон } j} Q_{\text{ср. кон } j} \Delta t_j 10^{-6}. \quad (14.36)$$

Через $Q_{\text{ср. кон } j}$ выражается средний для интервала Δt_j расход воды в конечном створе; $s_{i \text{ кон } j}$ — средняя для интервала частная мутность i -той фракции в конечном створе в $г/м^3$. Множитель 10^{-6} переводит вес наносов из граммов в тонны.

Мутность $s_{i \text{ кон}}$ определяется по уравнению распределения мутности вдоль участка водохранилища. Это уравнение имеет вид

$$s_{i \text{ кон } j} = s_{i \text{ тр } j} + (s_{i \text{ нач } j} - s_{i \text{ тр } j}) e^{-G_{i*} \tilde{\Delta x}}. \quad (14.37)$$

Здесь $\tilde{\Delta x}$ — относительная длина расчетного участка, находящаяся по формуле

$$\tilde{\Delta x} = \frac{\Delta x}{H_{\text{ср}}},$$

Δx — длина участка в $м$, $H_{\text{ср}}$ — средняя глубина потока на участке в $м$.

$$G_{i*} = \frac{u_i + k_i}{v_{\text{ср}}},$$

где $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость на участке, u_i — гидравлическая крупность рассматриваемой фракции наносов. Параметр k_i вычисляется из соотношения

$$k_i = \frac{u_i \Gamma_i}{1 - \Gamma_i}.$$

Транспортирующая способность потока на участке применительно к рассматриваемой i -той фракции ($s_{i \text{ тр } j}$) для режима, отвечающего интервалу Δt_j , вычисляется по формуле (14.34) с учетом поправочного множителя a (при наличии данных о стоке наносов). Надо помнить, что множитель a принимается одинаковым для всех расчетных участков водохранилища. Для верхнего участка величина $s_{i \text{ нач } j}$ определяется по данным о стоке рассматриваемой фракции наносов реки, питающей водохранилище; для последующих участков $s_{i \text{ нач } j}$ принимается равной $s_{i \text{ кон } j}$ выше расположенного участка.

Вес влекомых наносов в $кг$ или $т$, отложившихся на расчетном участке водохранилища за расчетный интервал времени Δt_j , определяется по формуле

$$P_{\text{дно } a j} = (R_{\text{дно нач } j} - R_{\text{дно кон } j}) \Delta t_j, \quad (14.38)$$

в которой $R_{\text{дно нач } j}$ и $R_{\text{дно кон } j}$ — значения расходов влекомых наносов соответственно на начальном и конечном створах участка. Эти величины вычисляются по формуле транспорта влекомых наносов при использовании средних для интервала Δt_j значений гидравлических элементов.

Общее количество отложений (в весовом выражении) на участке за интервал Δt_j находится как сумма отложений всех m фракций взвешенных и влекомых наносов

$$P_{aj} = \sum_{i=1}^m P_{iaj} + P_{дноaj}. \quad (14.39)$$

При вычислении транспортирующей способности необходимо знать процентное содержание отдельных фракций в составе донных отложений на участке, т. е. величину $\alpha_{i \text{ отл}}$. Эта величина для каждой фракции, в том числе и отложившихся влекомых наносов, находится по формуле

$$\alpha_{i \text{ отл}} = \frac{P_{iaj}}{P_{aj}} 100.$$

Переход от весового выражения отложений к их объему выполняется с помощью равенства

$$W_a = \frac{1}{\gamma_{\text{отл}}} P_a,$$

в котором $\gamma_{\text{отл}}$ — объемный вес отложений, выраженный в t^*/m^3 . Для грунтов, содержащих мало органических примесей, $\gamma_{\text{отл}}$ приближенно определяется по таблице, составленной Г. А. Петуховой (см. главу XIII).

Годовое заиление на расчетном участке водохранилища находится как сумма объемов заиления за все расчетные интервалы Δt_j , на которые разделен год. Суммируя объемы заиления по всем расчетным участкам, получаем общее годовое заиление всего водохранилища. Для того чтобы определить заиление за несколько лет, расчеты повторяются для последующих лет в таком же порядке, как и для первого года, но каждый раз вносятся исправления, учитывающие изменения объемов и соответственно глубин, происходящие за счет заиления.

Для расчета может быть использован и экстраполяционный метод Г. И. Шамова. В основу метода Шамова положено уравнение, устанавливающее зависимость между объемом и продолжительностью заиления

$$W_{at} = W_{a \text{ пред}} (1 - a_0^t), \quad (14.40)$$

где W_{at} — объем наносов в m^3 , отложившихся в водохранилище за период времени t ; t — число лет, $W_{a \text{ пред}}$ — предельная величина объема отложений наносов в водохранилище в m^3 , по достижении которой дальнейшее заиление прекращается, $a_0 = 1 -$

$\frac{W_{a1}}{W_{a \text{ пред}}}$ — параметр, характеризующий относительное заиление водохранилища в течение первого года, W_{a1} — объем отложений первого года в m^3 ; эта величина может быть найдена изложенным выше способом.

Учитывая приближенность экстраполяции по формуле (14.40), вычисление заилиения за первый год его эксплуатации производят также приближенно (для всего водохранилища в целом без разделения его на расчетные участки).

Величина $W_{a \text{ пред}}$ определяется по следующей формуле Шоклица, уточненной Шамовым:

$$W_{a \text{ пред}} = W \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_n} \right)^m \right], \quad (14.41)$$

где W — полный объем водохранилища в m^3 , ω_n — наибольшая площадь поперечного сечения верхнего бьефа на ближайшем к плотине участке в m^2 , ω_p — площадь поперечного сечения реки в m^2 в бытовых условиях при расходе воды, равном $3/4$ расчетного максимального расхода; показатель степени $m = 1, 7$.

Для расчета заилиения водохранилищ можно применить также метод К. И. Россинского и И. А. Кузьмина, рассмотренный в параграфе, посвященном методам расчета деформации русла при наличии данных о мутности потока.

Глава XV

ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ОЗЕР И ВОДОХРАНИЛИЩ

§ 1. Общие сведения о ветровом волнении

Под влиянием ветра на поверхности воды образуются поверхностные ветровые волны. Значительное развитие они получают лишь на больших и глубоких водоемах: океанах, морях, озерах и водохранилищах при сильном ветре. В настоящей книге рассматриваются только водоемы суши — озера и водохранилища; морей и океанов мы не будем касаться, однако надо иметь в виду, что методы теоретического изучения волнения являются общими для всех перечисленных выше гидрологических объектов.

Ветровые волны относятся к категории так называемых прогрессивных волн, т. е. волн, перемещающихся в пространстве. Отметим попутно, что к другой категории волн, образующихся в водоемах, относятся стоячие волны, системы которых неподвижны в пространстве; к ним принадлежат, например, сейши (длинные стоячие волны), возникающие под влиянием резких изменений атмосферного давления, а также толчея (короткие стоячие волны), являющаяся результатом интерференции (сложения) прямых и отраженных ветровых волн.

Ветровые волны характеризуются сравнительно небольшой длиной, превышающей их высоту не более чем в один-два десятка раз. Этим они коренным образом отличаются от изучав-

шихся нами в главе XI длинных волн, длины которых в сотни, тысячи, десятки тысяч и более раз превосходят их высоту.

Волны, возбужденные ветром в какой-либо части водоема, распространяются на прилегающие акватории, принося с собой волновую энергию. Эти волны отличаются способностью существовать лишь ассоциациями, группами. Волны, составляющие такие ассоциации (системы), располагаются параллельно друг другу и обычно перемещаются в направлении действующего ветра.

Возвышающаяся часть волны именуется гребнем, а пониженная часть — ложбиной. Высотой волны h (рис. 15.1) называется превышение высшей точки гребня над низшей точкой ложбины; превышение высшей точки гребня над уровенной поверхностью или превышение этой поверхности над низшей точкой ложбины называется амплитудой (a) волны. Очевидно, что $h=2a$.

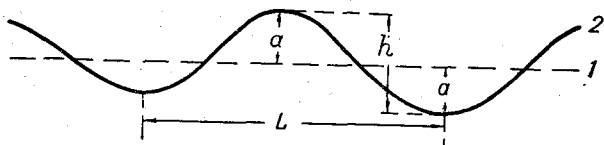


Рис. 15.1. Элементы ветровых волн.

1 — статический уровень, 2 — водная поверхность при волнении.

Ветровое волнение представляет собой варьирующее явление: высоты последовательно идущих одна за другой волн существенно отличаются между собой. Совокупность высот или длин волн данной системы волнения, наблюдаемых в конкретной точке водоема при определенных значениях скорости и направления ветра, может рассматриваться как спектр системы волн. По спектру высот волн можно построить кривую обеспеченности высот волн данной системы. Если говорят о размерах элементов волн, например, о высоте волны, то имеют в виду размер волны определенной обеспеченности. Существующие методы расчета высот ветровых волн предусматривают получение высоты волны определенной обеспеченности в данной системе волнения. Чаще всего расчет ведется на наиболее высокие волны системы, повторяющиеся, например, один раз из ста волн (1%-ная обеспеченность), один раз из двадцати волн (5%-ная обеспеченность) и т. д. Для перехода от одной обеспеченности волн к другой в специальной литературе приводятся таблицы переходных коэффициентов.

Отдельные волны системы могут быть охарактеризованы: высотой волны h , амплитудой a , длиной волны L и параметром крутизны волны m

$$m = \frac{h}{L}. \quad (15.1)$$

Важной характеристикой волны является скорость ее распространения, обозначаемая через c . Время прохождения одной волны (считая от ложбины до ложбины или от гребня до гребня) через фиксированную вертикаль определяет период волны T_0 . Взаимная связь указанных величин выражается равенствами:

$$T_0 = \frac{L}{c}, \quad (15.2)$$

$$L = cT_0. \quad (15.3)$$

Волна является одним из видов колебания свободной поверхности. Состояние колебательного процесса для каждого момента времени определяется фазой волны, которая измеряется в долях периода. Два гребня, например, представляют собой одинаковые фазы двух волн; то же можно сказать и о ложбинах или о других парах точек, занимающих подобное положение на двух волнах. Поскольку скорость перемещения фазы тождественно равна скорости распространения волны c , последнюю часто называют фазовой скоростью. В теории волн выводится следующая формула фазовой скорости:

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{L}}, \quad (15.4)$$

в которой через H обозначена глубина воды. Гиперболический тангенс th находится по математическим таблицам. Если значение аргумента заключено в пределах от 0 до 0,2, то гиперболический тангенс приблизительно равен аргументу, поэтому можно написать

$$\operatorname{th} \frac{2\pi H}{L} \cong \frac{2\pi H}{L} \left(\text{при } \frac{2\pi H}{L} < 0,2 \right). \quad (15.5)$$

Такое равенство имеет место в случае достаточно длинных волн, распространяющихся в водоеме ограниченной глубины, в случае выхода ветровых волн на береговую отмель. Подставляя равенство (15.5) в выражение фазовой скорости, получаем следующую уже известную нам формулу распространения длинной волны (см. главу XI):

$$c = \sqrt{gH} \left(\text{при } \frac{2\pi H}{L} < 0,2 \right).$$

Период волны вычисляется по формуле

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\pi L}{g} \operatorname{cth} \frac{2\pi H}{L}}, \quad (15.6)$$

содержащей под знаком радикала гиперболический котангенс.

При волновом движении водных масс происходят не только колебания водной поверхности, но и колебания частиц жидкости в толще водной среды. Практически заметные волновые колеба-

ния жидкости достигают глубины, равной примерно половине длины волны $\left(\frac{L}{2}\right)$. Сильно ослабленные колебания проникают на значительно большие глубины.

При волновых колебательных движениях частицы жидкости перемещаются по замкнутым траекториям — орбитам, имеющим форму окружности (в глубоководной зоне) или эллипса (на мелководье или вблизи дна). Движение частиц жидкости по таким траекториям называется орбитальным, а скорости, с которыми совершается движение, называются орбитальными скоростями. Орбитальная скорость частицы может быть выражена в проекциях на взаимно перпендикулярные координатные оси: горизонтальную x (проекция $v_{x \text{ орб}}$) и вертикальную (проекция $v_{y \text{ орб}}$).

Теоретически выводятся следующие формулы проекций орбитальной скорости, записанной для некоторой фиксированной вертикали, отвечающей, например $x=0$:

$$v_{x \text{ орб}} = \frac{\pi h}{T_0} \cdot \frac{\text{ch} \frac{2\pi}{L} (H-y)}{\text{sh} \frac{2\pi H}{L}} \sin \frac{2\pi t}{T_0}, \quad (15.7)$$

$$v_{y \text{ орб}} = -\frac{\pi h}{T_0} \frac{\text{sh} \frac{2\pi}{L} (H-y)}{\text{sh} \frac{2\pi H}{L}} \cos \frac{2\pi t}{T_0}. \quad (15.8)$$

Здесь y — вертикальная координата, имеющая начало на свободной поверхности и направленная вниз, t — время. Дроби правых частей уравнений (15.7) и (15.8) содержат гиперболические синус и косинус (sh , ch).

Как указано выше, ветровые волны переносят в направлении своего движения волновую энергию, которой обладает водная среда, совершающая колебательные движения. Согласно исследованиям В. М. Маккавеева, при больших глубинах осредненное значение волновой энергии в объеме жидкости, имеющем квадратное основание, равное единице и высоту, равную глубине воды H , выражается формулой

$$E = \frac{\gamma h^2}{8} = \frac{\gamma a^2}{2}, \quad (15.9)$$

где γ — удельный вес воды. Волновая энергия E имеет размерность работы $\tau^*/\text{м}$, отнесенной к площади основания упомянутого выше объема, т. е. к единице. Таким образом, $|E| = \tau^*/\text{м}$, где τ^* — тонна как единица силы.

Перенос волновой энергии осуществляется в направлении движения волн с некоторой скоростью U . Иначе эту скорость переноса волновой энергии называют групповой скоростью волн.

Именно с такой скоростью происходит распространение систем прогрессивных волн из области их возбуждения в область водоема, первоначально лишенную волновых колебаний. Поэтому скорость U и носит название групповой скорости.

При очень большой, теоретически бесконечной глубине водоема

$$U \cong \frac{c}{2}. \quad (15.10)$$

При конечных глубинах

$$U = \sigma c, \quad (15.11)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{2\pi H}{L \operatorname{sh} \frac{4\pi H}{L}}. \quad (15.12)$$

Распространение волн, так же как и перенос волновой энергии, происходит по ортогоналям к гребням волн. Ортогонали, направленные в сторону движения волн, называются лучами волн. Таким образом, можно сказать, что волновая энергия распространяется в направлении лучей волн.

§ 2. Уравнение баланса волновой энергии и методы расчета ветровых волн озер и водохранилищ

Большое значение в теории ветровых волн имеет выведенное в 1937 г. В. М. Маккавеевым уравнение баланса волновой энергии. В настоящее время все наиболее рациональные методы анализа и расчета ветровых волн океанов, морей и водохранилищ основаны на указанном энергетическом уравнении.

Рассмотрим вывод этого уравнения. Возьмем систему прямолинейных волн и выделим на водной поверхности прямоугольник длиной Δx и шириной 1, принимая, что ось x направлена по волновому лучу.

Умножение площади $\Delta x \cdot 1$ на глубину воды H дает объем, внутри которого будем рассматривать изменение содержания волновой энергии. Общее содержание волновой энергии в этом объеме в момент времени t_0 равно

$$\mathcal{E}_0 = E_{\text{ср.0}} \Delta x \cdot 1;$$

через интервал времени Δt оно изменится и выразится величиной

$$\mathcal{E} = E_{\text{ср}} \Delta x \cdot 1 = (E_{\text{ср.0}} + \Delta_t E) \Delta x \cdot 1.$$

Здесь $E_{\text{ср}}$ — среднее значение энергии рассматриваемого элемента.

За время Δt через начальное сечение k в элемент поступает энергия $\Delta \mathcal{E}_k$, а через замыкающее сечение $k+1$ выходит $\Delta \mathcal{E}_{k+1}$. Приращение волновой энергии за счет воздействия ветра на водную поверхность выделенного элемента за время Δt будем выражать произведением $\bar{R}_1 \Delta x_1 \Delta t$, а диссипативные потери энергии $\bar{R}_2 \Delta x_1 \Delta t$. В этих произведениях \bar{R}_1 — осредненное во времени количество энергии, подводимое в единицу времени извне к выделенному объему; \bar{R}_2 — осредненное во времени количество энергии, теряемое этим объемом в единицу времени за счет диссипации.

Уравнение баланса волновой энергии при учете выражений

$$\Delta \mathcal{E}_k = E_k U_k \Delta t$$

и

$$-\Delta \mathcal{E}_{k+1} = -E_{k+1} U_{k+1} \Delta t$$

может быть записано в виде

$$E_{\text{ср.0}} \Delta x_1 + E_k U_k \Delta t - E_{k+1} U_{k+1} \Delta t + \bar{R}_1 \Delta x_1 \Delta t - \bar{R}_2 \Delta x_1 \Delta t = (E_{\text{ср.0}} + \Delta_t E) \Delta x_1.$$

Здесь U_k и U_{k+1} — групповая скорость в соответствующих сечениях. Сокращение уравнения на $\Delta x_1 \Delta t$ позволяет получить

$$\frac{E_k U_k - E_{k+1} U_{k+1}}{\Delta x} + \bar{R}_1 - \bar{R}_2 = \frac{\Delta_t E}{\Delta t}. \quad (15.13)$$

Преобразование и переход к бесконечно малым приращениям дают следующее окончательное уравнение баланса волновой энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (UE)}{\partial x} - \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 0. \quad (15.14)$$

Уравнение (15.14) при условии определения в нем выражений \bar{R}_1 и \bar{R}_2 может быть использовано для вывода расчетных формул, определяющих волновую энергию, а вместе с тем и размеры элементов волн в зависимости от времени, длины разгона, скорости ветра, глубины воды и т. д.

Для водохранилищ А. П. Браславский, широко используя натурные данные, нашел приближенные выражения \bar{R}_1 и \bar{R}_2 . Далее он рассмотрел вопрос об изменении элементов волн вдоль разгона при установившемся волнении, т. е. при $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ и нашел расчетные формулы для высоты волны, отвечающие указанному случаю. По формулам он построил для различных скоростей ветра

номограммы высоты волны как функции разгона (т. е. расстояния от берега в направлении луча волн) при разных глубинах на участках разгона. В номограммах Браславского даются высоты волн обеспеченностью 1% в данной системе волнения (одна наиболее высокая волна из 100 волн данной ассоциации при установившемся волнении). Одна из номограмм Браславского в качестве примера приведена на рис. 15.2.

Скорость ветра W , фигурирующая в номограммах Браславского, предполагается полученной на высоте 10 м над поверхно-

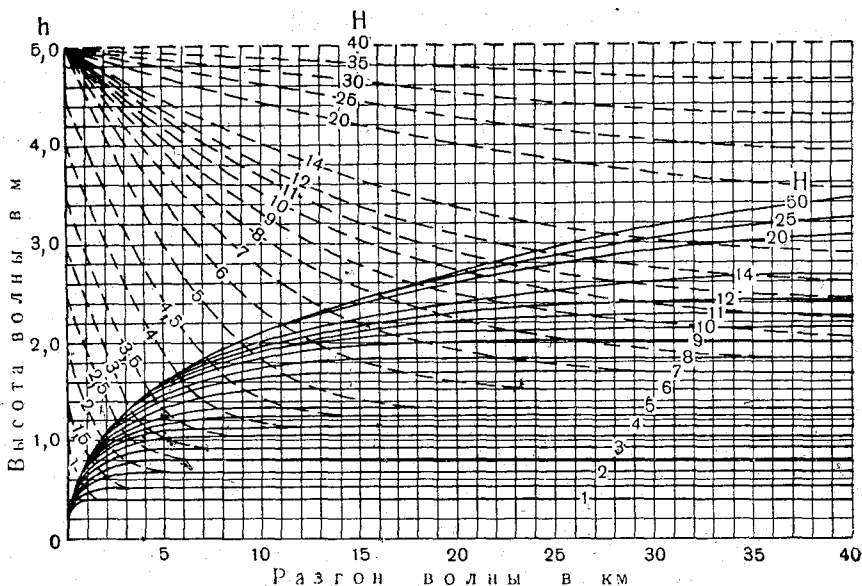


Рис. 15.2. Номограмма А. П. Браславского для определения высот волн h при скорости ветра $W_{10}=20$ м/сек и разных глубинах H .

стью воды. Для перевода скорости ветра, измеренной на высоте флюгера (примерно 10 м) на суше, к скорости ветра на той же высоте над водой Браславским рекомендуются специальные таблицы и графики.

Перед началом расчета волнения на план водоема наносятся линии разгона волн, совпадающие с направлением ветра. По путям разгона вычерчиваются продольные профили дна водоема. Профили делятся на расчетные участки, измеряются длины участков и находится средняя глубина каждого из них. Имея расчетную скорость ветра W , выбирают соответствующую номограмму и по ней производят расчет волн вдоль разгонов. В начале разгона у берега высота волны принимается равной нулю.

Откладывая от начала координат номограммы по оси абсцисс длину участка и пользуясь на номограмме графиком, отвечаю-

щим средней глубине первого участка, снимаем с графика высоту волны в конце участка. Высота волны в конце первого участка является в то же время и высотой волны в начале второго участка. Отыскав на номограмме график, отвечающий средней глубине второго участка, находим на нем точку, где высота волны равна начальной высоте, и, откладывая вправо от этой точки по оси абсцисс длину участка, находим высоту волны в конце второго участка.

В таком порядке выполняется расчет волн для всего пути разгона. Если по пути разгона встречается уменьшение глубины,

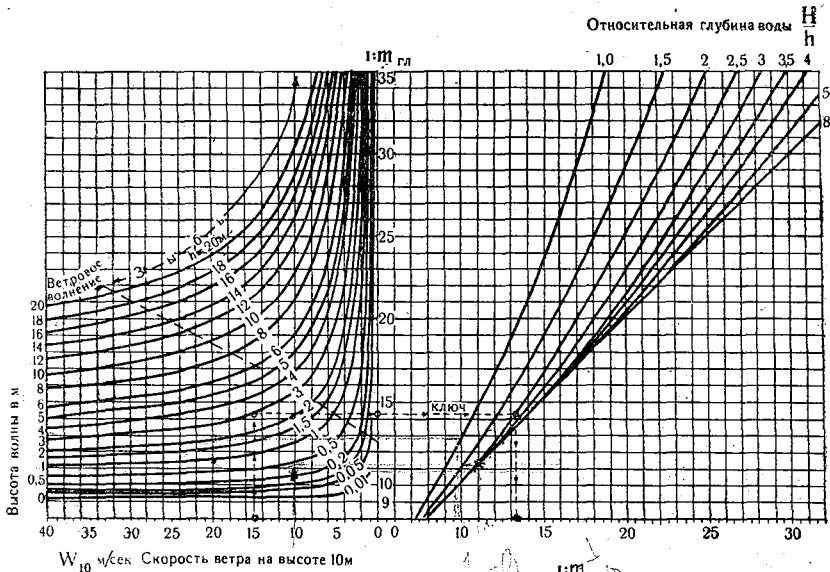


Рис. 15.3. Номограмма А. П. Браславского для определения параметра

$$\text{крутизны волны } m = \frac{h}{L} \cdot \left(\text{На номограмме дана величина } \frac{1}{m} \cdot \right)$$

приводящее к снижению высоты волны, то пользуются пунктирными кривыми номограмм, позволяющими получить снижение волны. Если на пути разгона встретится глубина H , меньшая 1,3 высоты волны, то в этом месте произойдет разбивание волны и она сразу приобретет высоту $h \cong 0,8H$, которая и принимается за высоту волны в конце такого мелководного участка. На следующих участках расчет ведется обычным способом.

По высоте волны можно определить длину волны L , а затем вычислить ее период и фазовую скорость. Предварительно надо получить параметр крутизны волны m . Для этой цели Браславский построил номограмму, изображенную на рис. 15.3.

Пользоваться этой номограммой следует так. Определив предварительно высоту волны и зная скорость ветра W , находят на левой стороне номограммы точку на пересечении вертикальной линии, отвечающей заданной скорости ветра с кривой, соответствующей найденной высоте волны. От этой точки по горизонтали переходят на правую часть чертежа, доходят до графика, вычерченного для соответствующей относительной глубины $\frac{H}{h}$. Спускаясь от точки пересечения с этим графиком по вертикали вниз, находят величину $\frac{1}{m}$, после чего легко вычислить m и длину волны $L = mh$. Далее вычисляют фазовую скорость c по формуле (15.4) и период волны T_0 по формуле (15.2).

Номограммы Браславского, построенные для установившегося волнения, проверены на натурном материале, и в настоящее время получили широкое распространение в практике расчетов ветрового волнения озер и водохранилищ.

Расчет элементов ветровой волны при наличии глубокой воды на всем протяжении разгона можно выполнять по формулам В. Г. Андреенова, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} h &= 0,021 W^{5/4} x^{1/3}; \\ L &= 0,30 W x^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

где W — скорость ветра на высоте флюгера на ближайшей к водоему метеорологической станции в $м/сек$, x — разгон волны в $км$. Глубоководность водоема определяется условием $H \geq 0,5 L$.

Формулы Андреенова составлены для так называемой средневысокой волны, что соответствует примерно 2,5—10%-ной обеспеченности в данной системе волнения.

Иногда возникает необходимость в приближенном определении высоты волны средней для данного участка акватории водоема. Такая задача стоит, например, при расчете ветрового нагона, когда по средней для участка высоте волны определяется один из параметров расчетной формулы. В этом случае при продольной скорости ветра определяем среднюю глубину расчетных участков акватории и находим высоту волны в начале и конце данного расчетного участка, получая среднее h для участка, как среднее из значений h в начале и конце участка. При ветре, направленном под углом к продольной оси участка, средняя волна находится как среднее h на продольной оси участка. Значения h вычисляются по номограммам с использованием расстояния по разгону от берега до оси участка и средней глубины на соответствующей части разгона.

§ 3. Виды течений озер и водохранилищ

В озерах и водохранилищах наблюдаются течения различной структуры и различного происхождения. Основными видами течения являются **сточные течения** (именуемые иногда **стоковыми**), **ветровые течения** и **конвекционные течения**.

Сточные течения обусловлены поступлением воды из притоков и выходом ее из озера или водохранилища соответственно через исток реки, берущей начало из озера, или через створ плотины. В этом случае всегда создается поверхностный уклон, направленный от источника к стоку. В озерах и в широкой части водохранилищ этот уклон практически неощутим, но тем не менее именно под его влиянием осуществляется течение.

Ветровые течения обусловлены действием ветра на свободную поверхность водоема, они отличаются своеобразной структурой, зачастую довольно сложной. Простейшие виды ветровых течений будут рассмотрены ниже.

Конвекционные течения, имеющие широкое распространение в озерах и часто встречающиеся в водохранилищах, обусловлены плотностной неоднородностью водных масс, которая в свою очередь может быть связана с термической неоднородностью или же с различием содержания (концентрации) растворенных, а иногда и взвешенных в воде веществ. Так, при охлаждении водоемов в осенний период более холодные массы воды поверхностного слоя опускаются на дно, уступая место более теплым и легким глубинным водам.

Большое значение в динамике озер и водохранилищ имеют также **прибрежные течения**, им посвящен специальный параграф этой главы.

Сложность структуры течений больших замкнутых водоемов обусловлена не только тем, что течения могут формироваться под влиянием различных причин, но и тем, что эти причины часто действуют одновременно. Кроме того, за счет инерции водных масс в водоемах существуют так называемые **остаточные течения**, вызванные тем фактором, который уже перестал

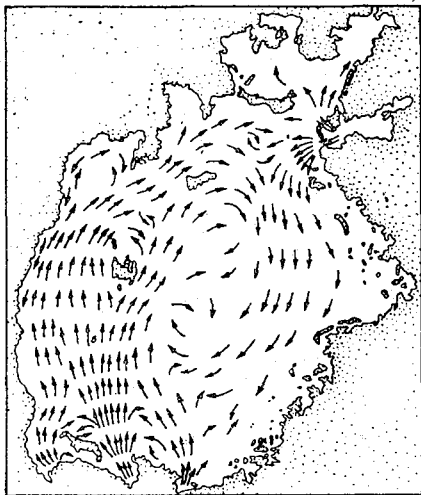


Рис. 15.4. Схема течений в поверхностном слое Аральского моря (по С. М. Жданко, 1940 г.).

действовать. Такие течения существуют под влиянием инерции до тех пор, пока не иссякнет их энергия. На остаточные течения накладываются течения, обусловленные новым фактором, приводя к появлению особенно сложной схемы течений. Если теперь учесть, что одним из основных факторов, обуславливающих течения в озерах и водохранилищах, является ветер, а ветер почти всегда крайне неустойчив по направлению и по скорости, то станет очевидным, что течения в озерах и водохранилищах должны отличаться большой изменчивостью.

Ввиду отсутствия хорошей методики натурных исследований озерные течения до сих пор изучены крайне недостаточно. Отсутствие же натурных материалов затрудняет теоретическое изучение течений и разработку методики их расчета. В настоящее время существуют лишь грубо приближенные методы расчета отдельных видов течений озер и водохранилищ.

Некоторое представление о возможной структуре сточных течений в большом замкнутом водоеме дает схема поверхностных течений Аральского моря (рис. 15.4), на которой ясно прослеживается связь течений водоема с впадением рек Сырдарья и Амударья.

Для выяснения характера сточных течений в замкнутых водоемах в настоящее время применяется метод лабораторных модельных исследований.

§ 4. Ветровые течения

Ветровые течения возбуждаются под влиянием касательного напряжения, создаваемого ветром на свободной поверхности водоемов. Кроме ветра, на водные массы действуют сила тяжести и силы сопротивления. В зависимости от интенсивности воздействия ветра, от величины сточного течения и от конфигурации водоема формируются разные виды ветровых течений. Рассмотрим эти виды.

Под влиянием начавшегося и постепенно усиливающегося ветра поверхностный слой воды в водоеме начинает двигаться в направлении ветра. Движение постепенно сообщается ниже расположенным слоям, таким образом формируется **дрейфовое течение** (рис. 15.5). Горизонтальное перемещение водных масс из одной части водоема в другую вызывает появление добавочного уклона водной поверхности I , направленного против ветра, благодаря этому на формирование ветровых течений начинает действовать сила тяжести. Под влиянием последней в глубинных слоях водоема развивается **градиентное течение**, направленное в сторону, противоположную дрейфовому течению, или начинает меняться структура глубинных сточных течений. Если одновременно имеют место дрейфовые и градиентные течения, то говорят о **смешанных течениях**.

Теоретические и натурные исследования позволили установить следующее выражение для проекции на горизонтальную ось x касательного напряжения τ_{0x} , действующего на поверхности воды:

$$\tau_{0x} = -\gamma T_x, \quad (15.16)$$

где T_x — параметр касательного напряжения, имеющий линейную размерность и выражающийся формулой

$$T_x = k_0 W_2^2 \cos \alpha. \quad (15.17)$$

Здесь W_2 — скорость ветра на высоте 2 м над водной поверхностью в м/сек, α — угол между вектором скорости ветра и обрат-

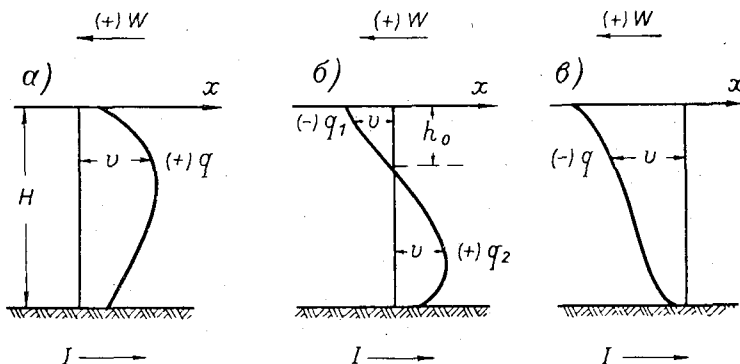


Рис. 15.5. Распределение скоростей по вертикали при ветровых течениях.

a — градиентное течение, $б$ — смешанные течения, $в$ — дрейфовое течение.

ным направлением оси x . Заметим, что при расчетах продольных ветровых течений в водохранилищах и ветровых стонов-нагонов, ось x располагают вдоль продольной оси водохранилища и направляют в сторону сточных течений. Ветер, направленный против сточного течения, считается положительным.

Коэффициент k_0 в формуле (15.17) определяется в зависимости от высоты ветровой волны h по эмпирическому соотношению

$$k_0 = 1,3(3 + 10h) 10^{-8}, \quad (15.18)$$

величина h выражается в м.

Следуя рассуждениям В. М. Маккавеева, рассмотрим простейший случай установившегося ветрового течения и выведем формулы распределения скоростей течения по вертикали. Воспользуемся записанным в проекции на продольную ось x уравнением движения установившегося турбулентного потока.

Принимая приближенную неизменность скорости вдоль осей x и z (последняя предполагается расположенной поперек потока), пренебрегая поперечными составляющими скорости v_y и v_z и полагая $v_x = v$, записываем указанное уравнение таким образом:

$$\gamma I + A_{cp} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (15.19)$$

Вертикальная ось y имеет начало на свободной поверхности потока и направлена вниз.

Уравнение (15.19) интегрируется при использовании следующих граничных условий:

выражения касательного напряжения на поверхности, обусловленного ветром (τ_{0x}),

$$\left(A \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = -\tau_{0x} = \gamma T_x \quad (15.20)$$

и значения донной скорости

$$v_H = -l \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=H}. \quad (15.21)$$

Содержащаяся здесь характерная линейная величина l может быть определена по следующей приближенной зависимости:

$$l = \left(\frac{C}{2m} - \frac{1}{3} \right) H, \quad (15.22)$$

где C — коэффициент Шези,

$$m \cong 0,35C + 6.$$

Граничное условие (15.21) построено весьма рационально: оно позволяет учесть донную шероховатость и не приводит в общем случае к получению нулевой скорости у дна, что является существенным недостатком многих используемых в океанологии решений о ветровых течениях.

Двукратное интегрирование уравнения (15.19) при учете граничных условий у поверхности и введении поверхностной и донной скоростей позволяет получить следующие уравнения распределения скоростей по вертикали (индекс « x » при T будем опускать, помня, что эта величина, так же как и поверхностный уклон I , записана относительно оси x):

для градиентных течений

$$v = v_0 + \frac{\gamma T}{A_{cp}} y - \frac{\gamma I}{2A_{cp}} y^2, \quad (15.23)$$

для дрейфовых течений

$$v = v_H - \frac{\gamma T}{A_{cp}} (H - y) - \frac{\gamma I}{2A_{cp}} (H^2 - y^2), \quad (15.24)$$

для смешанных течений

$$v = \frac{\gamma T}{A_{cp}} (y - h_0) - \frac{\gamma I}{2A_{cp}} (y^2 - h_0^2). \quad (15.25)$$

В этих формулах h_0 — глубина точки, в которой скорость переходит через нуль (рис. 15.5), H — глубина потока, v_0 — скорость у поверхности, v_H — скорость у дна, γ — удельный вес воды.

Рассмотрим теперь вопрос о назначении коэффициентов турбулентного обмена. В основу оценки характера распределения коэффициента турбулентного обмена по вертикали должна быть положена следующая структурная формула:

$$A = \frac{\gamma}{g} k \omega \lambda,$$

рассмотренная в главе IV, где также указано, что в обычных русловых потоках ω имеет более или менее равномерное распределение по вертикали, давая небольшое увеличение ко дну, а λ заметно возрастает ото дна к поверхности, определяя в конечном счете и распределение A по вертикали.

Данные о распределении указанных величин в потоке, связанном с действием ветра, отсутствуют. Поэтому в настоящее время приходится ограничиваться приближенным решением, в котором используется лишь среднее значение коэффициента турбулентного обмена по вертикали.

Для получения A_{cp} для условий ветровых течений Маккавеев предлагает следующую формулу:

$$A_{cp} = \frac{\gamma q^*}{2mC}, \quad (15.26)$$

где C — коэффициент Шези, $m = 0,35C + 3$, q^* — абсолютная величина элементарного расхода дрейфового или градиентного течения, а при смешанных течениях — сумма абсолютных значений расходов поверхностного дрейфового течения q_1 и донного градиентного течения q_2 , т. е. соответственно

$$q^* = |q|, \quad \text{или} \quad q^* = |q_1| + |q_2|. \quad (15.27)$$

Рассмотрим случай смешанных течений. Выведенную применительно к этому случаю зависимость для q^* можно представить таким образом:

$$q^* = HE \sqrt{|T|}, \quad (15.28)$$

где E — переменная величина, имеющая размерность корня квадратного из ускорения. Произведение $E \sqrt{|T|}$ выражает среднюю

по вертикали абсолютную скорость, которую можно обозначить через v^* , зависимость (15.28) при этом приобретает вид

$$q^* = v^* H.$$

Вывод формулы (15.28) очень громоздок, поэтому здесь он не приводится. Интересующиеся могут ознакомиться с ним в книге автора: «Сгонно-нагонные явления на водохранилищах и озерах», 1960 г.

Значение E определяется зависимостью

$$E = \sqrt{mC} \sqrt{1 + 2\tilde{h}_0^2 - 2\tilde{h}_0 - \frac{1}{\Theta} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\tilde{h}_0^3 - \tilde{h}_0^2 \right)}, \quad (15.29)$$

где Θ — безразмерный параметр, введенный автором в теорию ветровых течений и используемый для выяснения вида этих течений

$$\Theta = \frac{T}{HI}. \quad (15.30)$$

При взятых положительных направлениях уклона (вдоль оси x) и ветра (против оси x) градиентные, смешанные и дрейфовые течения должны иметь место при следующих значениях Θ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{градиентные } 0 \leq \Theta \leq \tilde{m}, \\ \text{смешанные } \tilde{m} < \Theta < 1, \\ \text{дрейфовые } 1 \leq \Theta \leq +\infty \text{ и } -\infty \leq \Theta < 0. \end{array} \right\} \quad (15.31)$$

Здесь принято

$$\tilde{m} = \frac{m + 3C}{4m + 3C}. \quad (15.32)$$

В теории ветровых течений используется понятие **стационарного течения**, являющегося частным случаем смешанных течений, от которых оно отличается равенством абсолютных значений элементарных расходов поверхностного (q_1) и донного (q_2) течений. Стационарное течение имеет место при условии

$$\Theta = \frac{1}{d}, \quad (15.33)$$

где

$$d = 1 + \frac{m}{3C}. \quad (15.34)$$

Стационарное течение формируется при стабилизации ветрового течения в водоеме, в котором сточное течение отсутствует.

Вместо абсолютного значения h_0 в уравнение (15.29) введено относительное значение этой величины ($\tilde{h}_0 = \frac{h_0}{H}$). Для \tilde{h}_0 имеем формулу

$$\tilde{h}_0 = \Theta - \sqrt{(\Theta - \tilde{\gamma} - 1)^2 - \tilde{\gamma}^2}, \quad (15.35)$$

где

$$\tilde{\gamma} = \frac{C}{2m} - \frac{1}{3}. \quad (15.36)$$

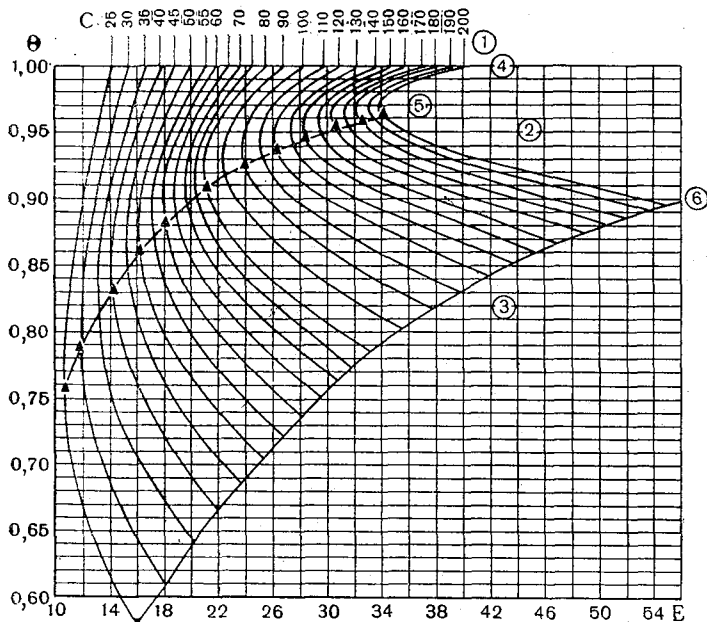


Рис. 15.6. Графики функции $E(\Theta, C)$.

1 — зона дрейфовых течений, 2 — зона смешанных течений, 3 — зона градиентных течений, 4 — граница между 1-й и 2-й зонами, 5 — линия стационарного течения, 6 — граница между 2-й и 3-й зонами.

Величину E можно представить как функцию двух переменных Θ и C . На рис. 15.6 изображены графики функции $E(\Theta, C)$, которыми удобно пользоваться при расчетах.

Остановимся более подробно на распределении скоростей при стационарном течении. В этом случае, как указано выше, $\Theta = \frac{1}{d}$.

Подставляя значение Θ в уравнение распределения скоростей при смешанных течениях и вводя индекс «ст» для

обозначения функции E при стационарном течении, находим следующую формулу:

$$v = \frac{2mC_{\text{д}}}{E_{\text{ст}}} \cdot \frac{T}{\sqrt{|T|}} \left(a + \frac{1}{\alpha} \tilde{y} - 0,5\tilde{y}^2 \right). \quad (15.37)$$

Здесь принято

$$a = \left(1 + \tilde{l} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) - 0,5.$$

Безразмерная функция, заключенная в скобки в выражении (15.37), определяет вид кривой распределения скоростей по вертикали. Обозначим эту функцию через \tilde{v} , т. е. примем

$$\tilde{v} = a + \frac{1}{\alpha} \tilde{y} - 0,5\tilde{y}^2, \quad (15.38)$$

тогда получим расчетное уравнение распределения скорости

$$v = \frac{2mC_{\text{д}}T}{E_{\text{ст}}\sqrt{|T|}} \tilde{v}. \quad (15.39)$$

Теперь для стационарного случая можно найти поверхностную скорость v_0 , для этого достаточно в уравнение (15.39) подставить $\tilde{y} = 0$. Расчетную формулу можно записать в виде

$$v_0 = KW_2, \quad (15.40)$$

где W_2 — скорость ветра на высоте 2 м над водой. В этой формуле W_2 всегда принимается положительным. K — так называемый ветровой коэффициент, определяемый зависимостью

$$K = \frac{mC_{\text{д}}}{1400E_{\text{ст}}} \left[\frac{1}{2} - \left(1 + \tilde{l} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \sqrt{3 + 10h}. \quad (15.41)$$

Под радикалом здесь фигурирует высота волны h , выражаемая в м.

§ 5. Вдольбереговое волноприбойное течение

Прибрежная зона озер и водохранилищ отличается особой сложностью структуры течений. Непосредственно в этой зоне могут иметь место все упомянутые выше виды течений: сточные, ветровые, конвекционные. Для нее характерны также и особые виды течений, не встречающиеся в других частях водоема, к таковым относятся в первую очередь **волноприбойные течения**, обусловленные процессами разбивания волн на береговой отмели.

Вообще прибрежные течения можно разделить на **вдольбереговые**, **нормальные** и **комплексные**. Первые из них характеризуются совпадением направления скорости с направлением бере-

говой линии. На рис. 15.7 приведена фотография вдольберегового течения на Цимлянском водохранилище. Течение стало заметным благодаря насыщению глинистыми частицами, попавшими в воду при размыве берега. Нормальные течения характеризуются переносом водных масс в перпендикулярном к береговой линии направлении, при этом всегда имеют место области течений, направленных к берегу, и противотечений. Обычно это ветровые смешанные течения или волноприбойные нормальные



Рис. 15.7. Вдольбереговое течение в Цимлянском водохранилище.
Вид с высокого крутого берега.

течения; к этой последней группе относятся так называемые **разрывные течения**, которые отдельными порциями выносят водные массы из зоны волноприбоя в направлении глубоководной зоны. Комплексные прибрежные течения имеют вдольбереговую и нормальную составляющие и могут иметь различное происхождение.

Особой интенсивностью отличаются **вдольбереговые волноприбойные течения**, скорости которых могут превышать 1—1,5 м/сек, в отличие от других видов озерных течений, характеризующихся малыми скоростями (порядка нескольких см/сек или дм/сек). Остановимся детально на этих течениях.

Вдольбереговое волноприбойное течение возникает под влиянием энергии, освобождающейся при разрушении волн, подходящих под острым углом к береговой линии. Ввиду высокой турбулентности и больших скоростей вдольбереговое течение обладает высокой транспортирующей способностью и поэтому играет большую роль в режиме наносов прибрежной зоны водохранилища и в процессе формирования берега.

Изучение вдольбереговых течений на водохранилищах начато сравнительно недавно. Прежде такие течения изучались лишь на морских побережьях. Теории и расчету морских вдольбереговых течений посвящены исследования Путнама, Мунка,

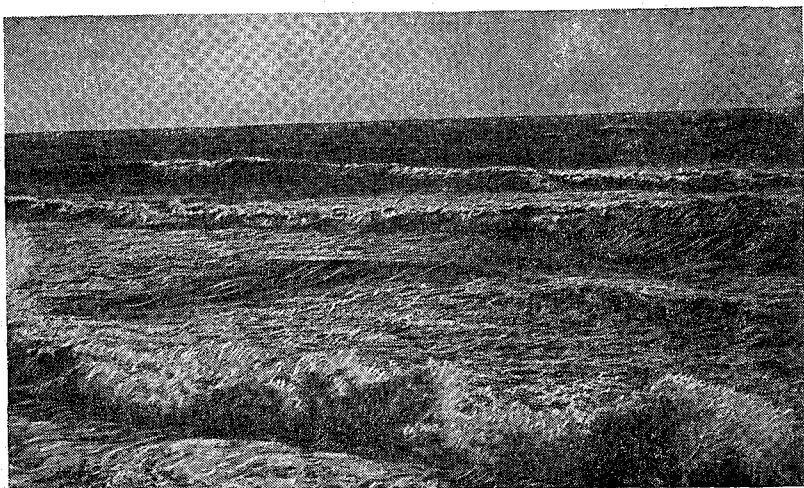


Рис. 15.8. Разрушение волн у берега в зоне волноприбоя.

Трейлора, Инмана, И. Ф. Шадрина и др. Изучение вдольберегового течения водохранилищ выполнено А. С. Судольским, А. Я. Шварцман и Н. А. Ярославцевым. Последними установлена, в частности, недостаточность предложенных упомянутыми американскими учеными формул скорости вдольберегового течения. В этих формулах неполно учитывается действующее в волноприбойном течении гидродинамическое сопротивление. Шварцман предложила новый способ вывода уравнения вдольберегового течения, лишенный указанного недостатка; она отмечает, что гидродинамическое сопротивление вдольберегового потока складывается из донного трения и трения на внешней границе вдольберегового потока, сопрягающегося вдоль линии волноприбоя с более инертными водными массами. При этом указывается, что донное трение обусловлено не только турбулизацией

потока за счет донной шероховатости, но и турбулизацией за счет волновых движений, имеющих место в зоне существования потока, т. е. в зоне разрушения волн. Здесь знакопеременные волновые перемещения водных масс, сопровождаемые обрушением волн, являются основным фактором турбулизации.

При подходе волн к береговой отмели крутизна их фронтального склона увеличивается, и при выходе на глубину, равную $0,8h$ (h — высота глубоководной волны, подходящей к берегу), волна разрушается, продвигаясь далее по отмели к урезу в виде пенящегося вала (рис. 15.8). На всем пути волны от начала ее разрушения до конца наката на пляж происходит преобразование и гашение волновой энергии. Часть энергии при этом

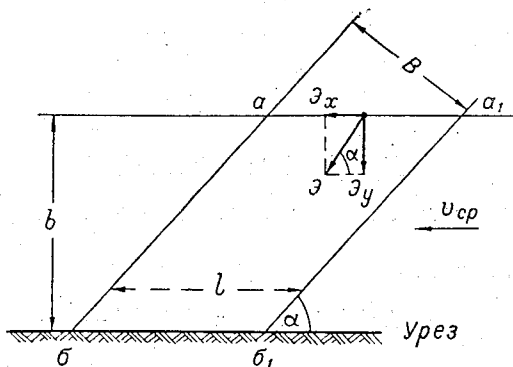


Рис. 15.9. Схема к выводу формулы скорости вдольберегового волноприбойного течения.

расходуется на возбуждение и поддержание течения, а часть (как правило, небольшая) уходит от берега в виде отраженных волн.

Рассмотрим некоторый контрольный объем воды aa_1bb_1 в зоне волноприбоя (рис. 15.9), ограниченный с двух сторон соответственно линиями уреза (bb_1) и разбивания волн (aa_1), с двух других — лучами волн ab и a_1b_1 . Обозначим расстояние между лучами по урезу или по линии aa_1 через l , а ширину зоны волноприбоя через b . Расстояние между лучами по фронту волны обозначим через B , а острый угол между лучом волны и урезом через α . Полный поток энергии, поступающий в рассматриваемый объем в течение одной секунды через линию aa_1 , выразится величиной

$$\mathcal{E} = UBE, \quad (15.42)$$

где U — групповая скорость, E — волновая энергия. В зоне волноприбоя волновую энергию несут одиночные разрушающиеся валы, перемещающиеся со скоростью c (c — фазовая скорость),

поэтому для указанной зоны $U=c$ и формула (15.42) приобретает вид

$$\mathcal{E} = cBE. \quad (15.43)$$

Поток энергии, определяемый равенством (15.43), имеет две составляющие: по оси x (продольная составляющая \mathcal{E}_x) и по оси z (нормальная составляющая \mathcal{E}_z). Нормальная составляющая энергии частично затрачивается на формирование наката волн, поддержание повышенного уровня в зоне волноприбоя и формирование разрывных течений, а частично отражается. Продольная составляющая \mathcal{E}_x расходуется на формирование вдольберегового течения и частично гасится. Если через F_1 обозначить активную силу, вызывающую вдольбереговое течение со средней скоростью $v_{\text{ср}}$, то секундная работа этой силы выразится произведением $F_1 v_{\text{ср}}$. Этой работе тождественна та часть продольной составляющей волновой энергии, которая затрачивается на возбуждение течения $k\mathcal{E}_x$, где k — коэффициент, меньше единицы

$$F_1 v_{\text{ср}} = k\mathcal{E}_x = kc_x BE, \quad (15.44)$$

где c_x — вдольбереговая составляющая скорости распространения волн.

Нетрудно показать, что

$$k\mathcal{E}_x = kcEl \sin \alpha \cos \alpha = kcEl \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Теперь записываем

$$F_1 = \frac{kcEl \sin 2\alpha}{2v_{\text{ср}}}. \quad (15.45)$$

Рассматривается установившееся вдольбереговое течение, поэтому активная сила должна уравновешиваться силой сопротивления, приложенной ко всему контрольному объему aa_1bb_1 . Сила сопротивления F_2 определяется как сумма двух составляющих: силы сопротивления в зоне волноприбоя, приводимой к донному трению, и силы сопротивления на границе этой зоны по линии aa_1 (рис. 15.9), т. е. бокового трения. При определении двух последних сил учитывается величина коэффициента турбулентного обмена, который для случая волновой турбуликации вычисляется по формуле

$$A_{\text{волн}} = \frac{\gamma ch d^{1/3}}{\pi a H^{1/3} g}. \quad (15.46)$$

Здесь h — высота волны, d — эффективный диаметр частиц донных отложений, H — глубина, a — эмпирический коэффициент. Выражение для $A_{\text{волн}}$ в отличие от соответствующей формулы для открытого руслового потока содержит элементарный волновой расход $q_{\text{волн}}$. Волновой расход обозначает среднюю за

период абсолютную величину знакопеременного переноса водных масс, определяемого волновым движением жидкости, и вычисляется из соотношения

$$q_{\text{волн}} = \frac{ch}{\pi}. \quad (15.47)$$

Заметим, что если осреднить за период волны значения волнового переноса жидкости с учетом их алгебраического знака, то получаем нулевой перенос.

Приравнявая активную силу суммарной силе сопротивления, Шварцман приходит к следующей зависимости для величины средней скорости вдольберегового волноприбойного течения:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{gH^{1/3}h \sin 2\alpha}{\left(0,1 + 800 \frac{H^2}{b^2}\right) d^{1/3} b}}, \quad (15.48)$$

где h — высота волны перед разрушением, H — глубина на линии разрушения волн; остальные обозначения прежние.

Выражение, стоящее в знаменателе в скобках, получено теоретически при выводе формулы бокового трения в следующем общем виде: $m + n \frac{H^2}{b^2}$. Численные значения коэффициентов m и n определены по эмпирическим данным.

§ 6. Сгоны и нагоны на озерах и водохранилищах

Выше указывалось, что под влиянием ветра в озерах и водохранилищах образуются течения, которые приводят к перемещению водных масс из одной части водоема в другую. Появляется перекоп водной поверхности или же изменяются имевшие место ранее уклоны. Подъем уровня в одной части водоема, именуемый **нагоном**, всегда сопровождается снижением уровня, т. е. **сгоном**, в другой его части. Такие процессы изменения уровней водоемов, обусловленные действием ветра, называются **ветровыми сгонами и нагонами** или **ветровыми денивеляциями**.

При наличии приблизительно однородности ветра над озером или водохранилищем (что при сильных ветрах является обычным) сгонно-нагонные денивеляции носят характер общих перекопов водной поверхности с так называемым узловым сечением вблизи от центра тяжести площади водоема. На рис. 15.10 в качестве примера дан продольный профиль поверхности Цимлянского водохранилища во время сгонно-нагонной денивеляции. Синхронность хода уровней на водомерных постах в рассматриваемом случае прослеживалась в общем достаточно отчетливо. Отдельные отклонения от синхронного хода уровней могут быть объяснены как некоторой неодновременностью

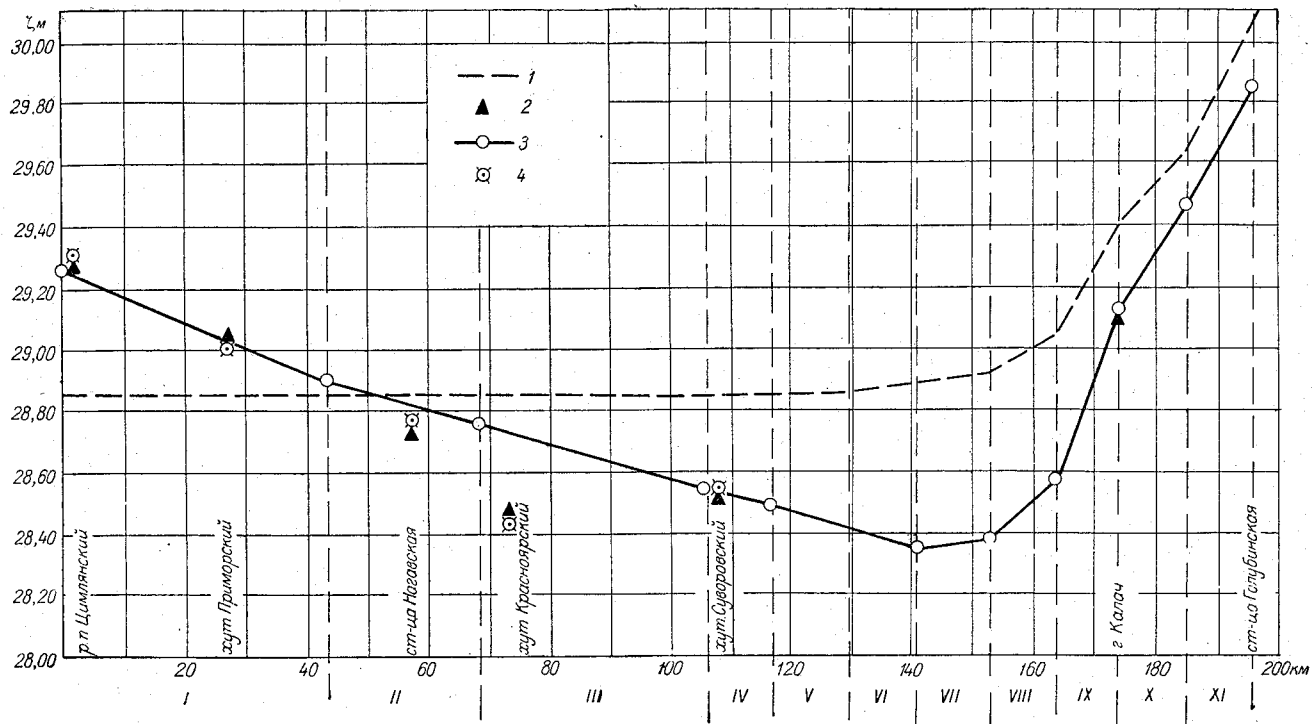


Рис. 15.10. Сгонно-нагонная денивелиция Цимлянского водохранилища по наблюдениям 12/XI 1952 г. и по расчету.

1 — продольный профиль водной поверхности до начала денивелиации по расчету; 2 — измеренные уровни на водомерных постах во время наибольшей денивелиации; 3 — построенный по расчету продольный профиль водной поверхности во время наибольшей денивелиации (по продольной оси водохранилища). 4 — вычисленные уровни на водомерных постах (вычисления сделаны при учете поперечной денивелиации).

наступления одинаковых фаз ветра над разными частями водоема, так и поперечными перекосами водной поверхности. Узловым сечением (или просто узлом) сгонно-нагонных денивеляций и сейш называют сечение, в котором при общей денивеляции свободной поверхности уровень остается неизменным. Скорость же обусловленного ветром перемещения водных масс в этом сечении оказывается наибольшей.

Рассмотрим метод расчета установившихся сгонов и нагонов в водохранилищах, характеризующихся наличием сточных транзитных течений. Такой расчет производится при одновременном использовании динамических уравнений и уравнения неразрывности.

Расчет по динамическим уравнениям выполняется по схеме расчета кривых свободной поверхности рек (метод Рахманова).

В параграфе о ветровых течениях были приведены выражения распределения скоростей по вертикали в потоке, находящемся под влиянием ветра. Интегрирование этих выражений в соответствующих пределах позволяет получить формулы элементарного расхода.

Указанные формулы могут быть распространены на поперечное сечение потока и после преобразований приведены к следующему виду:

для градиентных и дрейфовых течений

$$Q|Q| = H_{cp} \omega^2 C^2 \left(I - \frac{dT_x}{H_{cp}} \right), \quad (15.49)$$

где Q — расход воды,
для смешанных течений

$$Q = \frac{H_{cp} \omega C^2}{E \sqrt{|T|}} \left(I - \frac{dT_x}{H_{cp}} \right). \quad (15.50)$$

В этих уравнениях ω — площадь поперечного сечения, C — коэффициент Шези, E — функция, определяемая по графикам (рис. 15.6), коэффициент $d = 1 + \frac{m}{3C}$, T_x — параметр, через который выражается воздействие ветра на водную поверхность, причем, как указывалось выше,

$$T_x = -\gamma_{0,x} = k W_2^2 \cos \alpha.$$

Прямыми скобками показаны абсолютные значения величин.

В уравнении (15.50) Q выражает результирующий расход, получаемый как разность расходов поверхностного и донного течений.

В условиях установившейся сгонно-нагонной денивеляции, когда на всем водохранилище отметки водной поверхности хотя

бы в течение короткого отрезка времени оказываются неизменными, расход Q также не изменяется вдоль водоема и всегда оказывается величиной положительной и равной расходу сточного течения.

Исходя из этого условия, в соответствии с уравнениями (15.49) и (15.50) можно написать следующие расчетные зависимости для определения падения Δz : для градиентных и дрейфовых течений

$$\Delta z = F_1 Q^2 + F_2 T_x; \quad (15.51)$$

для смешанных течений

$$\Delta z = F_3 EQ \sqrt{|T_x|} + F_2 T_x. \quad (15.52)$$

Эти формулы записаны для расчетных участков водоема длиной Δx , для которых и определяется падение Δz . Функции F_1 , F_2 и F_3 вычисляются по средним для участков значениям гидравлических элементов и представляют в графическом виде подобно тому, как это делают и при подготовке к построению кривых свободной поверхности рек. Указанные функции находятся по формулам:

$$F_1 = \frac{\Delta x}{H_{cp} \omega^2 C^2}; \quad (15.53)$$

$$F_2 = \frac{\mu \Delta s}{H_{cp}}; \quad (15.54)$$

$$F_3 = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta s}}{\omega H_{cp} C^2}, \quad (15.55)$$

где Δx — длина расчетного участка, измеренная вдоль его динамической оси, Δs — его длина, измеренная по прямой. Нетрудно заметить, что функция F_1 является не чем иным, как модулем сопротивления, который в предыдущих главах настоящей книги обозначен через F .

Вопрос о том, какой формулой следует пользоваться при расчете — (15.51) или (15.52), — решается непосредственно во время выполнения вычислений. Осуществляя попытки вычислений по этим формулам, проверяют, какой характер течения может иметь место при получаемом падении Δz на участке. Как критерий используется безразмерное число

$$\Theta = \frac{T_x \Delta s}{H_{cp} \Delta z} = \frac{T_x}{H_{cp} I} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x}. \quad (15.56)$$

Смешанные течения имеют место при

$$\tilde{m} < \Theta < 1.$$

Вычисление падений по формулам (15.51) и (15.52) выполняется методом подбора. Заметим, что при $T_x=0$ формула (15.51) превращается в обычную формулу гидравлики, применяемую для построения кривых свободной поверхности рек.

Используемое при расчете установившихся сгонов-нагонов уравнение неразрывности может быть записано для всего водоема следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \Delta V_i = 0, \quad (15.57)$$

где N — число всех участков, ΔV_i — приращение объема воды на расчетном участке во время денивеляции (положительное при подъеме уровня и отрицательное при его понижении)

$$\Delta V_i = \delta \zeta_i \Delta \Omega_i, \quad (15.58)$$

$\delta \zeta_i$ — изменение (повышение с плюсом или понижение с минусом) уровня в середине расчетного участка во время денивеляции, $\Delta \Omega_i$ — площадь зеркала расчетного участка.

Весь расчет сгонно-нагонной денивеляции выполняется методом подбора. Сперва при произвольном начальном уровне у плотины строится кривая водной поверхности по уравнениям (15.51) и (15.52), а затем по уравнению (15.57) проверяют, удовлетворяет ли полученная кривая условию неизменности объема воды в водоеме. Если условие (15.57) не выполняется, то необходимо выяснить, какую величину $\Delta \zeta_0$ следует добавить (или отнять) к начальной отметке у плотины. Этот вопрос решается ориентировочно при использовании формулы

$$\Delta \zeta_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta V_i}{\Omega_{\text{общ}}}, \quad (15.59)$$

где $\Omega_{\text{общ}}$ — площадь зеркала всего водоема.

Увеличив (или уменьшив) использованное ранее значение начальной отметки у плотины на величину $\Delta \zeta_0$, производят повторно расчет по формулам (15.51) и (15.52), а затем снова проверяют на удовлетворение условию неразрывности. При определенном навыке после 2—3 таких расчетов получается окончательное решение.

В случае если транзитный расход сточного течения относительно мал и на протяжении всего водохранилища падения $\Delta z_{\text{ст}}$, связанные с ним, также невелики, расчет сгонов-нагонов может выполняться по формуле

$$\Delta z_{\text{в}} = F_2 T_x. \quad (15.60)$$

Общее падение в этом случае находится по приближенному соотношению

$$\Delta z \cong \Delta z_{\text{ст}} + \Delta z_{\text{в}}, \quad (15.61)$$

которое пригодно лишь при малых значениях падения $\Delta z_{ст}$, отвечающего сточным течениям. В этом случае увязка объемов также осуществляется по формуле (15.57).

Для приближенного определения разности уровней на концах малопроточного водоема длиной L можно предложить следующую формулу:

$$\Delta z_{в} = (3 + 10h) 10^{-8} \frac{L}{H_{ср}} W_{фл}^2 \cos \alpha, \quad (15.62)$$

где $W_{фл}$ — скорость ветра на береговой станции на высоте флюгера, $H_{ср}$ — средняя глубина водоема, α — угол между направлением ветра и осью L , h — высота волны. Все линейные размеры выражают в метрах.

Водохранилища речного типа с затопленной поймой обычно характеризуются значительным различием глубин по ширине. Если площади водного сечения русла и поймы (или двух пойм) соизмеримы (отличаются не более чем в 2—3 раза), то для расчета падения на участках такого водохранилища следует пользоваться формулой

$$\Delta z_{в} = \frac{F_{1п} F_{2р} T_x р + F_{1р} F_{2п} T_x п}{F_{1р} + F_{1п}}, \quad (15.63)$$

где $F_{1п}$, $F_{1р}$, $F_{2п}$, $F_{2р}$ — функции F_1 и F_2 для поймы и русла (или для мелкой и глубокой частей поперечного сечения водоема).

Сравнение значений $\Delta z_{в}$, вычисленных по формулам (15.60) и (15.63), с наблюдаемыми значениями $\Delta z_{в}$ показывает, что неучет различия глубин по ширине водоема и оперирование лишь со средней глубиной на участке приводит к преувеличению (иногда значительному) сгонно-нагонных денивеляций.

Применение критерия Θ к пойменной и русловой частям малопроточного водохранилища, для которого выполнен расчет ветровой денивеляции по формуле (15.63), обнаруживает, что на пойме расход направлен в сторону ветра, а в русле — против ветра.

Для расчета неустановившихся сгонов-нагонов крупных водоемов может быть использован изложенный в главе XI метод мгновенных режимов. Отличие будет заключаться лишь в том, что расчет расхода воды Q выполняется не по обычной формуле гидравлики, а по одному из следующих двух выражений: для градиентных и дрейфовых течений

$$Q = \pm \sqrt{\frac{\Delta z - F_2 T_x}{F_1}}, \quad (15.64)$$

для смешанных течений

$$Q = \frac{\Delta z - F_2 T_x}{F_3 E \sqrt{|T_x|}}. \quad (15.65)$$

В первой из этих зависимостей расход считается положительным, если положительно выражение под радикалом, и отрицательным, если это выражение отрицательно.

Виды течений устанавливаются по величинам параметра Θ .

§ 7. Взвешивание и транспортирование наносов в условиях волнового взмучивания

В русловых потоках взвешивание и транспортирование наносов зависит от гранулометрического состава, от средней скорости течения, от скорости у дна и от интенсивности турбулентного перемешивания, выражающейся через коэффициент турбулентного обмена. В потоках, связанных с действием ветра, когда в водоеме одновременно с течением развивается ветровое волнение, при мелководье $H \leq \frac{1}{2} L$ появляется новый существенный фактор — орбитальное движение воды у дна.

Волнение является такого рода движением, при котором диссипативные процессы оказываются менее выраженными, чем в потоках. Несколько ограниченным оказывается и развитие турбулентности, связанной непосредственно с волнением.

При одновременном наличии течений и волнения турбулентность, возникающая в придонном слое, определяется как скоростью течения, так и орбитальной скоростью у дна. Орбитальное движение создает знакопеременные скорости у дна, периодически возникающие и исчезающие. В короткие промежутки времени (меньше половины периода волны), когда у дна имеет место скорость, формируются вихри. Последние не могут получить значительного развития ввиду кратковременности действия возбуждающего их фактора. Естественно, что такие вихри лишь в слабой мере способны проникать в выше расположенные слои жидкости. Поэтому в порядке первого приближения можно принимать, что турбулентность основной толщи водных масс водоема обусловлена течением, тогда как турбулентность придонного слоя развивается в результате совместного действия волнения и течения. В равной мере можно считать, что взмыв наносов у дна определяется турбулентностью, обусловленной волнением и течением, а их взвешивание в основной толще воды — турбулентностью, зависящей только от течения. Заметим, что уточненные решения должны учитывать оба указанных фактора турбулизации для обеих зон потока.

Вопрос о коэффициенте турбулентного перемешивания при ветровых течениях был рассмотрен выше; этот коэффициент может быть найден по следующей приближенной формуле:

$$A_{cp} = \frac{\gamma g^*}{2mC}.$$

На основании принятых предположений для случая установившегося взвешивания получаем то же самое выражение распределения мутности по вертикали, которое выведено для русловых потоков. Для частной мутности s_i , отвечающей i -той фракции, оно записывается так:

$$s_i = s_{Hi} e^{-\frac{\gamma u_i}{g A_{cp}} (H-y)}, \quad (15.66)$$

где u_i — гидравлическая крупность наносов рассматриваемой фракции. Общая мутность равна сумме мутности частных фракций. Для общей мутности S при однородных наносах, характеризующихся гидравлической крупностью U , имеем

$$S = S_H e^{-\frac{\gamma U}{g A_{cp}} (H-y)}, \quad (15.67)$$

здесь S_H и s_{Hi} — соответственно общая и частная донная мутность.

При учете выражения коэффициента турбулентного обмена показатель степени уравнения (15.67) преобразуется так:

$$\frac{\gamma U}{g A_{cp}} (H-y) = N G^* (1 - \tilde{y}),$$

где, как и ранее, $\tilde{y} = \frac{y}{H}$. Кроме того, принято

$$N = \frac{2mC}{g}, \quad G^* = \frac{U}{v^*},$$

причем

$$v^* = \frac{q^*}{H}.$$

Теперь уравнение (15.67) принимает вид

$$S = S_H e^{-N G^* (1 - \tilde{y})}, \quad (15.68)$$

для частной мутности может быть записано аналогичное уравнение.

Мутность взмыва $S_{взм}$ определяется по формуле, построенной аналогично формуле мутности взмыва речного потока, но с учетом действия волнения. Выражение $S_{взм}$ записывается следующим образом:

$$S_{взм} \cong 150 \frac{N}{H} (|v_H| + \sqrt{v_{x \text{ орб } H}})^2, \quad (15.69)$$

причем $S_{взм}$ измеряется в $г/м^3$.

Здесь $|v_H|$ — абсолютная величина скорости течения у дна, $|\overline{v_{x \text{ орб } H}}|$ — среднее абсолютное значение продольной составляющей орбитальной скорости у дна, вычисляемое по формуле

$$|\overline{v_{x \text{ орб } H}}| = \frac{2h}{T_0 \operatorname{sh} \frac{2\pi H}{L}}. \quad (15.70)$$

В этой формуле h , T_0 и L — соответственно высота, период и длина волны. Элементы ветровых волн находятся по методу Браславского, причем вычисленная высота волны должна быть приведена к волне 10%-ной обеспеченности. Для этого найденная по номограммам Браславского высота волны умножается на коэффициент 0,75.

Переход от $S_{взм}$ к донной мутности S_H осуществляется по формуле, используемой для речных потоков, а именно

$$S_H = \Phi S_{взм}.$$

Средняя мутность воды при ветровом течении, отвечающая условию насыщенности наносами, т. е. его транспортирующей способности, определяется по формуле

$$S_{cp} = \Phi B^* S_{взм}. \quad (15.71)$$

Функция B^* находится по графикам (рис. 15.11) при заданных значениях коэффициента C и параметра G^* .

Функция Φ находится по графику, приведенному в главе XIII, по аргументу ϵ^* , определяемому соотношением

$$\epsilon^* = \frac{U}{\omega_H^*}, \quad (15.72)$$

где ω_H^* — среднее абсолютное значение пульсационной скорости у дна при наличии течений и волнения. Для этой величины в порядке первой ориентировки можно принять следующую формулу:

$$\omega_H^* \cong \frac{v_{cp}^*}{\sqrt{N}} + \frac{|\overline{v_{x \text{ орб } H}}|}{\sqrt{N_{волн}}}, \quad (15.73)$$

в которой сделана попытка учета значений орбитальной скорости у дна и скорости транзитного течения как факторов

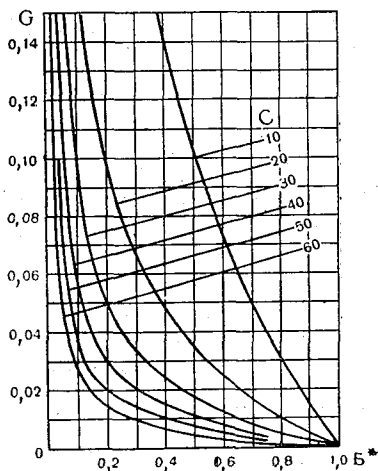


Рис. 15.11. График функций $B^*(C, G^*)$.

турбулизации водных масс придонного слоя. $N_{\text{волн}}$ — характеристический параметр, введенный для волнового движения

$$N_{\text{волн}} \cong \frac{2,5}{h} \cdot 10^3. \quad (15.74)$$

Рассмотренный здесь способ расчета мутности разработан автором. Метод расчета мутности в волноприбойной зоне и прилегающей к ней мелководной части побережья рассмотрен Шварцман, которая указывает, что для этой зоны применимы приведенные в настоящем параграфе формулы, и лишь одна из них, именно формула мутности взмыва, потребовала уточнения, которое свелось к введению в формулу (15.69) множителя β , найденного из эмпирического соотношения

$$\beta = 1 - 0,7 \frac{h}{H}. \quad (15.75)$$

Эта зависимость получена Шварцман на основании исследований, выполненных на Кременчугском водохранилище. Формула (15.75) имеет такие пределы применимости:

$$0,2 < \frac{h}{H} \leq 0,7.$$

При условии $\frac{h}{H} > 0,7$ практически имеем уже разрушение волн; здесь β является величиной постоянной и равной примерно 0,5. При $\frac{h}{H} < 0,2$ рассматриваемый участок побережья считается относительно глубоким и для него берется $\beta = 1$, т. е. расчет ведется непосредственно по формуле (15.69).

Скорость течения при расчете мутности в зоне волноприбоя вычисляется по формуле Шварцман (15.48), приведенной в § 6 настоящей главы. Получив мутность и имея величину скорости течения, зная также размеры (ширину и среднюю глубину) зоны волноприбоя, мы можем рассчитать вдольбереговой расход наносов.

§ 8. Процессы формирования берегов водохранилищ

Процесс формирования берега водохранилища может быть разделен на две стадии. Первая стадия характеризуется весьма интенсивным размывом коренного берега. На рис. 15.12 показано, как выглядел разрушающийся высокий берег Цимлянского водохранилища вскоре после заполнения последнего.

В период первой стадии преобладает нормальный к береговой линии перенос продуктов размыва, т. е. наносов, при этом крупные частицы отлагаются у самого берега, формируя бере-

говую отмель, а мелкие выносятся в глубоководную часть водохранилища.

После образования береговой отмели и пляжа особенно важную роль в формировании берега приобретает вдольбереговой перенос наносов. Начинается вторая стадия развития береговой линии, при переходе к которой береговая линия сохраняет значительную горизонтальную расчлененность и представляет собой чередование мысов и бухт, сопрягающихся короткими более

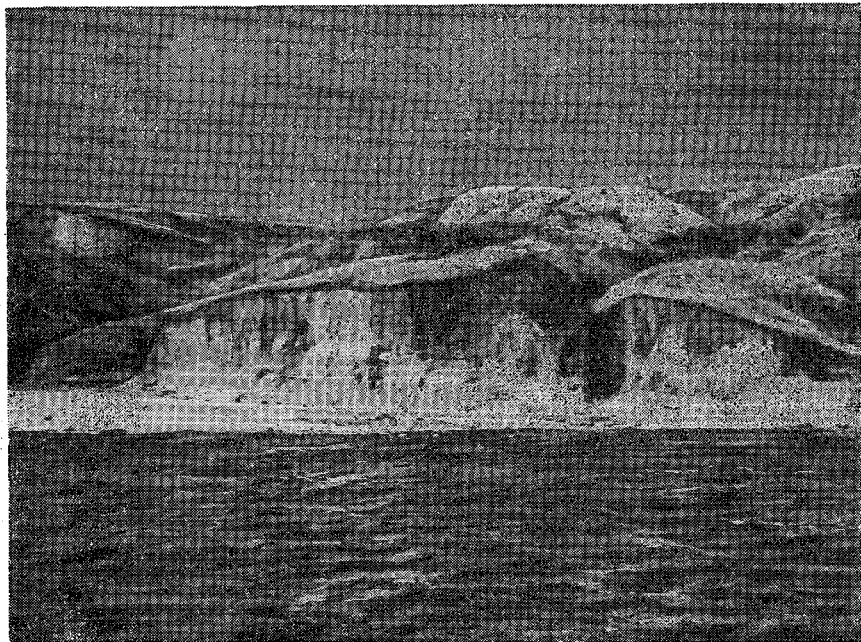


Рис. 15.12. Интенсивно разрушающийся берег Цимлянского водохранилища в 1957 г.

или менее прямолинейными участками. Под влиянием волнения и вдольберегового течения во второй стадии происходит постепенное выравнивание береговой линии.

Вопрос о связи формирования береговой линии с волновыми движениями водных масс еще в 1934 г. рассматривал В. Г. Глушков. Он заметил, что на длинном участке морского побережья для отвода воды, поступающей к берегу при набегании волн, требуется целый ряд обратных течений. Этими течениями все побережье делится на участки, в средних частях которых наблюдается сконцентрированный приток воды к берегу, в боковых — обратные течения, отводящие воду в море. Места усиленного

притока воды Глушков назвал фокусами действия прибоя. Фокусы располагаются там, где береговая линия выступает в море, образуя мысы. Наличие же фокусов у мысов способствует их размыву, выносу продуктов размыва в обе стороны от мысов, что приводит к выравниванию береговой линии.

В работе Шварцман указывается, что особую роль в рассмотренном Глушковым процессе выравнивания береговой линии играют вдольбереговые течения. Она отмечает, что при этом возможны следующие два случая: 1) фронт подходящих к берегу волн параллелен общему направлению береговой линии, 2) фронт волн образует острый угол с общим направлением береговой линии. Именно во втором случае роль вдольберегового течения оказывается особенно большой. Скорость вдольберегового течения у мысов наибольшая, высота волны здесь также наибольшая. Это приводит к большой транспортирующей способности вдольберегового потока у мысов. Насыщенный продуктами размыва поток попадает затем на прямой участок берега и далее в бухту или залив, где его транспортирующая способность резко снижается. Здесь поток теряет иногда значительную часть принесенных им наносов и движется дальше уже частично осветленным.

В дальнейшем при чередовании выпуклых и вогнутых участков берега картина повторяется. Таким образом, наблюдается чередование зон размыва, производимого вдольбереговым потоком и разрушающимися волнами (на мысах) и зон аккумуляции (в бухтах и заливах), за счет чего происходит постепенное выравнивание береговой линии. В случае отрыва вдольберегового течения от берега, что нередко имеет место у особенно сильно выступающих мысов или у поворотов береговой линии, зона аккумуляции переносится в глубокую часть водоема, куда устремляется оторвавшийся от берега вдольбереговой поток. Такую картину автор неоднократно наблюдал на берегах морей и водохранилищ.

В настоящее время при проектировании водохранилищ особое внимание уделяется процессам формирования берегов. Используются предложенные рядом авторов методы расчета переработки берегов. Ниже мы рассмотрим лишь один из них — метод Н. Е. Кондратьева, имеющий определенное гидродинамическое обоснование. Хотя и этот метод не учитывает всей сложности береговых процессов и основан на приближенной схеме, тем не менее в настоящее время он признается лучшим и широко применяется в практике проектирования водохранилищ.

Основным недостатком принятой Кондратьевым схематизации является неучет вдольберегового потока наносов. Поэтому, строго говоря, может использоваться для той части берега, где имеет место вдольбереговой транзитный перенос наносов, и не применим к выступам береговой линии и бухтам. Метод Кон-

дратьева должен рассматриваться как метод, дающий фоновое представление о процессе формирования достаточно больших участков берега: он позволяет получить осредненный для участка профиль берега и среднюю величину смещения береговой линии.

Расчет переформирования берегов заключается в определении размеров и формы береговой отмели и размеров абразии берега. Эта задача решается двумя следующими этапами: 1) выполняется расчет профиля береговой отмели устойчивого при заданном волнении и определенном составе наносов, 2) производится размещение построенного профиля относительно первоначального профиля берега. В дальнейшую задачу расчета входит определение времени промежуточных этапов развития отмели и времени окончательного ее формирования.

Расчет устойчивого профиля заключается в определении глубины, на которую распространяется действие заданной волны, и установлении очертания отмели. Для глубины размывающего действия волн H_b Кондратьев вывел приближенную формулу, в которой содержатся опытный коэффициент и параметр, зависящий от объемного веса грунта. Если принять для этих величин значения, отвечающие некоторым средним условиям, которые могут иметь место в действительности, то упомянутая формула приводится к виду

$$H_b = 0,64h \operatorname{Arsh}(8,1h), \quad (15.76)$$

где h — расчетная высота волны в м. Формула содержит арксинус, т. е. обратный гиперболический синус от $8,1h$. За расчетную высоту волны принимается наибольшая высота волны, которая может наблюдаться на водохранилище вблизи от рассматриваемой части берега.

По формуле (15.76) находят ту глубину, которая должна была бы иметь место на внешнем крае отмели, если бы действие расчетной волны на берег всегда происходило при одном и том же уровне ζ_p (рис. 15.13). В действительности уровни водохранилищ подвержены сильной изменчивости. Если амплитуда колебаний уровня в водохранилище равна D , при этом высокий уровень держится не слишком короткий период, то очевидно, что на краю отмели установится глубина, равная $H_b + D$.

Образующаяся отмель может быть разделена на две части: одна из них, примыкающая к коренному берегу, имеет криволинейное очертание профиля (fb на рис. 15.13), другая — прямолинейное очертание по линии ff_1 . Нетрудно заметить, что при снижении уровня на величину D глубина на краю отмели (в точке f_1) будет равна H_b , т. е. отвечать предельной досягаемости действия расчетной волны. Волны других размеров будут действовать внутри области bf_1 , производя разработку, соответствующую их

мощности и высоте, но не нарушая той линии bf_1 , которая отвечает предельной волне.

Кривая bf строится по эмпирическому уравнению

$$x = \frac{i_0 - i_{10}}{20i_0i_{10}} y^2 + \frac{1}{i_0} y, \quad (15.77)$$

в котором x — координата, имеющая начало у уреза, расположенная на свободной поверхности и направленная по нормали к берегу в сторону водохранилища, y — вертикальная ось с началом у уреза (рис. 15.13), i_0 — уклон береговой отмели в точке уреза, i_{10} — уклон отмели на расстоянии 10 м от уреза. Величины i_0 и i_{10} зависят от крупности частиц, образующих отмель, и определяются приближенно по составленной Кондратьевым табл. 15.1.

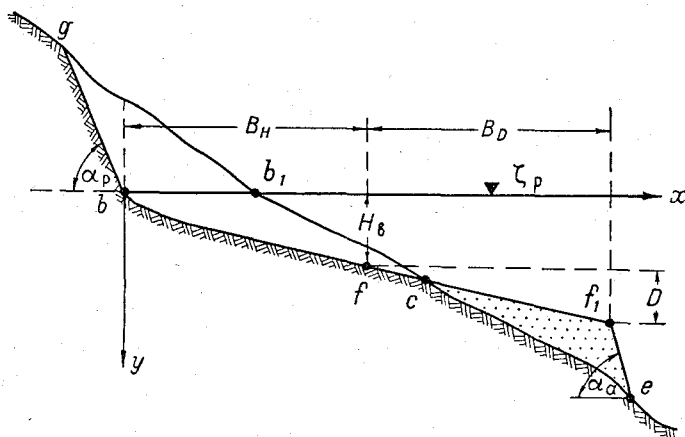


Рис. 15.13. Формирование береговой отмели водохранилища (ζ_p — расчетный уровень).

Таблица 15.1

Зависимость уклонов устойчивой береговой отмели у уреза (i_0) и в 10 м от уреза (i_{10}) от крупности грунта (по Н. Е. Кондратьеву)

Грунт		i_0	i_{10}	Грунт		i_0	i_{10}
Песок	мелкий . . .	0,03	0,005	Гравий	мелкий . . .	0,19	0,03
	средний . . .	0,07	0,01		средний . . .	0,21	0,05
	крупный . . .	0,14	0,02		крупный . . .	0,25	0,08

Крупность грунта, участвующая в формировании отмели, определяется следующим образом. По кривой гранулометрического состава грунта, характеризующего весь объем разрушения gcb ,

находят процент фракций, имеющих диаметр d , меньший $0,05$ мм. Принимают, что эти фракции выносятся за пределы отмели и не участвуют в ее формировании. Среднюю крупность из 10% наиболее крупных фракций принимают за крупность наносов на урзе, а среднюю крупность из 30% наиболее мелких из оставшегося грунта принимают за крупность частиц на расстоянии 10 м от уреза.

Отношение объема аккумуляции W_a к объему размыва W_p принимается равным отношению процента остающихся фракций после вымыва мелких ($d < 0,05$ мм) к 100, представляющему процентное содержание всех фракций в общем объеме размыва.

Ширину криволинейного участка профиля находят по формуле

$$B_H = \frac{H_B^2 (i_0 - i_{10})}{20i_0 i_{10}} + \frac{H_B}{i_0}. \quad (15.78)$$

Ширину прямолинейной части профиля B_D определяют по формуле

$$B_D = D \left[\frac{2H_B (i_0 - i_{10})}{20i_0 i_{10}} + \frac{1}{i_0} \right]. \quad (15.79)$$

Полная ширина отмели, очевидно, определяется суммой

$$B = B_H + B_D. \quad (15.80)$$

По формулам (15.76) — (15.80) строят профиль береговой отмели, включающий его абразионную и аккумулятивную части. Этот профиль дополняется линиями bg и f_1e , которые вычерчиваются по величинам углов откоса α_p и α_a . Для сыпучих грунтов тангенс угла откоса принимается равным 0,5, а при прочных, в частности связных, грунтах принимается равным 1,0.

Далее приступают к следующему этапу построения. Получив отношение $\frac{W_a}{W_p}$, имея первоначальный профиль берега (на рис. 15.13 gce) и найденный по расчету устойчивый профиль ($gbfcf_1e$) перемещают по горизонтальной линии x один по отношению к другому таким образом, чтобы объемы абразии и аккумуляции получились в требуемом соотношении $\frac{W_a}{W_p}$. Теперь

по чертежу легко получить размер переработки берега, оценить величину предельного смещения уреза b_1f и найти положение бровки берегового склона g .

Н. Е. Кондратьевым разработан также способ получения хода переработки берегов во времени; здесь этот способ не рассматривается.

В последние годы в порядке усовершенствования методики Кондратьева Н. А. Ярославцевым была предпринята попытка учета вдольберегового переноса наносов при расчете переформирования берегов водохранилищ. Однако наиболее полное решение этой задачи, по-видимому, может быть осуществлено лишь на основе учета не только динамического воздействия разрушающихся волн на береговой откос, но и при использовании полного уравнения баланса наносов, учитывающего одновременно их продольный и поперечный (относительно линии уреза) перенос.

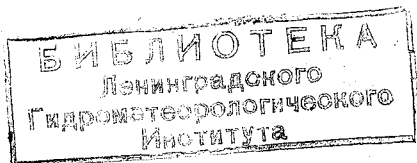
При проектировании и эксплуатации водохранилищ возникает задача о выяснении характера и интенсивности формирования их ложа, обусловленного как процессом формирования берегов, так и заилением водохранилища за счет стока наносов.

Методика расчета заиления водохранилищ детально рассмотрена в главе XIV.

ЛИТЕРАТУРА

- Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И. Гидравлика. Госэнергоиздат, М.—Л., 1950.
- Алтунин С. Т. Регулирование русел рек при водозаборе. Сельхозгиз, М., 1950.
- Бай Ши-и. Турбулентное течение жидкостей и газов. Изд. иностр. лит., М., 1962.
- Бахметев Б. А. Гидравлика открытых русел. Госстройиздат, Л.—М., 1941.
- Бернадский Н. М. Речная гидравлика. Госэнергоиздат, Л.—М., 1933.
- Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. «Наука», М., 1964.
- Великанов М. А. Динамика русловых потоков. Гидрометеоздат, Л., 1949.
- Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков. Гидрометеоздат, Л., 1962.
- Егiazаров И. В. Наука о движении наносов, сопредельные науки и возможности экспериментирования. Сб. «Исследование и комплексное использование водных ресурсов». Изд. АН СССР, Л., 1960.
- Караушев А. В. Гидравлика рек и водохранилищ (в задачах). Изд. «Речной транспорт», Л., 1955.
- Караушев А. В. Проблемы динамики естественных водных потоков. Гидрометеоздат, Л., 1960.
- Караушев А. В. Сгонно-нагонные явления на водохранилищах и озерах. Гидрометеоздат, Л., 1960.
- Караушев А. В. и Панчурин Н. А. Сборник задач по гидравлике, ч. II. Изд. «Речной транспорт», Л., 1957.
- Кириллов В. В. Международная система единиц измерений (СИ) в метеорологии. Гидрометеоздат, Л., 1965.
- Кондратьев Н. Е. Расчеты береговых переформирований на водохранилищах. Гидрометеоздат, Л., 1960.
- Кондратьев Н. Е., Ляпин А. Н., Попов И. В., Пиньковский С. И., Федоров Н. Н., Якунин И. И. Русловой процесс. Гидрометеоздат, Л., 1959.
- Леви И. И. Динамика русловых потоков. Госэнергоиздат, М.—Л., 1957.
- Маккавеев В. М. Вопросы структуры осредненного поля скоростей турбулентных водных потоков. Тр. ГГИ, вып. 22 (76), 1950.
- Маккавеев В. М. Турбулентность русловых потоков. Тр. ГГИ, вып. 124, 1965.
- Маккавеев В. М. и Коновалов И. М. Гидравлика. Речиздат, Л.—М., 1940.
- Маккавеев Н. И. Русло реки и эрозия в ее бассейне. Изд. АН СССР, М., 1955.
- Михайлова Н. А. Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды. Гидрометеоздат, Л., 1966.

- Никитин И. К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. Изд. АН УССР, Киев, 1963.
- Николаи Е. Л. Лекции по теоретической механике, ч. I. (Статика твердого тела. Кинематика), ч. II (Динамика). ОНТИ Л.—М., 1935, 1936.
- Павловский Н. Н. Гидравлический справочник ОНТИ. Гл. ред. энерг. лит.-ры. Л.—М., 1937.
- Панчурин Н. А. Сборник задач по гидравлике. ч. I. Изд. «Речной транспорт». Л., 1956.
- Практические рекомендации по расчету заиления водохранилищ. (Материалы к техн. указ. по расчетам гидрологического режима при строительном проектировании). Изд. ГГИ, Л., 1966.
- Расчеты неустановившегося движения воды в реках (практическое пособие), составлено М. С. Грушевским, изд. ГГИ, Л., 1967.
- Ржаницин Н. А. Речная гидравлика, ч. I и II. Энергоиздат, М.—Л., 1934.
- Субботина Е. П. Сборник физических констант и параметров. Справочник для студентов. Изд. ЛГУ, Л., 1967.
- Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Гидравлические расчеты водосливов. Госэнергоиздат, Л.—М., 1952.
- Указания по расчету заиления водохранилищ при строительном проектировании. Гидрометеоздат, 1968 г.
- Труды ГГИ, вып. 2(56), 35(89), 56(110), 100, 111, 124, 136 и 141. Гидрометеоздат, Л.
- Форхгеймер Ф. Гидравлика. ОНТИ, Гл. ред. энергетич. литературы М.—Л., 1935.
- Чеботарев А. И. Гидрологический словарь. Гидрометеоздат. Л., 1964.
- Чертоусов М. Д. Гидравлика (специальный курс). Госэнергоиздат, М.—Л., 1957.
- Чугаев Р. Р. Гидравлика. Госэнергоиздат, М.—Л., 1963.
- Шамов Г. И. Речные наносы. Гидрометеоздат, Л., 1959.
- Шулейкин В. В. Физика моря. Изд. АН СССР, М., 1953.



Караушев Анатолий Васильевич

РЕЧНАЯ ГИДРАВЛИКА

Курс общей и специальной гидравлики для гидрологов

Отв. редакторы: Н. А. Панчурин, Б. С. Бородкин

Редактор Г. Г. Доброумова

Художник Ф. В. Равдоникас

Худож. редактор В. А. Евтихиер

Техн. редактор М. И. Брайнина

Корректоры: Т. В. Алексеева и Б. А. Минц

Сдано в набор 2/1 1969 г. Подписано к печати 20/V 1969 г. Бумага 60×90/16.
 Бум. тип. № 1. Бум. л. 13+1 вкл. Печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 25,84. Тираж 4300 экз. М-15527.
 Индекс ГЛ-200

Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23.
 Заказ № 19. Цена 1 руб. 10 коп.

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Ленинград, Прачечный пер., д. 6.