



УДК 389.17:006

А.Л. Розов, Н.Ю. Русина, Г.Л. Атоян

РАЗРУШЕНИЕ БЕТОННЫХ ПЛОТИН НА МЯГКОМ ОСНОВАНИИ. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПРОРАНА В ОСНОВАНИИ МНОГОСЕКЦИОННЫХ ПЛОТИН

Плотина — это гидротехническое сооружение, перегораживающее реку для подъема уровня воды перед ним и создания водохранилища.

Мировой опыт насчитывает более 300 разрушений плотин гидроузлов за последнее столетие в мирное время, из них — несколько в России. Последнее катастрофическое событие — разрушение в 1993 году сравнительно небольшой Киселевской плотины (Свердловская область), которое унесло 15 человеческих жизней и причинило убыток в 40 млрд. руб.

При разрушении плотины основной ущерб причиняет волна прорыва (рис. 1). Основные параметры волны прорыва, определяющие ее поражающее действие, — высота, скорость и длительность затопления — непосредственно зависят от процесса разрушения плотины. Следовательно, для оценки ущерба от последствий распространения волны прорыва необходима разработка физико-математической модели процесса разрушения плотин.

Основными факторами, влияющими на разрушение бетонных плотин на основании из местных материалов (мягкое основание), являются [1–4]:

перелив воды через гребень (при опасных природных процессах и техногенных катастрофах);

размыв основания плотины вихревым течением.

Известно, что разрушение бетонных плотин данного типа происходит в две стадии [1]:

образование начального *прорана* — бреши в основании плотины (например, вследствие терактов, землетрясений или в результате старения основания и стен плотины);

развитие прорана из-за размыва в основании придонным вихревым течением.

Математическую модель разрушения бетонных плотин на основании из местных материалов [1, 5] после ряда приближений для практических расчетов можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -\frac{Cd}{2} \sqrt{g} \frac{H_0^2}{V_0} BH^{1/2}, & H(0) = H_0; \\ \frac{dB}{dt} = \alpha \sqrt{g} \frac{A}{\bar{H}^{1/3}} H^{1/2}, & B(0) = B_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $H = H(t)$ — глубина воды в водохранилище перед плотиной; $B = B(t)$ — ширина критической (наиболее узкой) секции прорана; α и C_d — известные численные коэффициенты; g — ускорение свободного падения; H_0, V_0 — начальная глубина и объем воды в водохранилище; B_0 — величина начального прорана; \bar{H} — средняя глубина в водохранилище у плотины за вре-

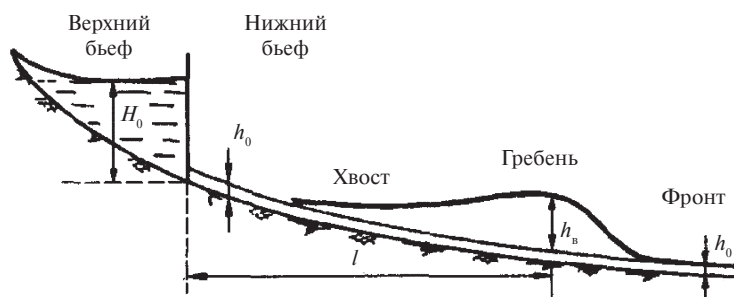


Рис. 1. Волна прорыва в нижнем бьефе

мя развития прорана; A — константа, зависящая от характеристик грунта и параметров потока.

В процессе разрушения бетонных плотин на скальном основании главенствующую роль играют фильтрационные процессы и развитие трещин вследствие фильтрации воды в тело плотины [3, 4], что требует построения других математических моделей, в частности позволяющих определить начальный проран, учитывающих коэффициент устойчивости плотины, что выходит за рамки данной работы.

Задачей настоящей работы было интегрирование системы (1) для моделирования разрушения бетонных плотин на основании из местных материалов, а также проведение аналогичных расчетов применительно к разрушению многосекционных бетонных плотин на основании из местных материалов.

Интегрирование системы (1) требует постановки начальных условий для решения задачи Коши. В данной работе будем предполагать, что начальный проран B_0 известен и задан. Как правило, начальный проран образуется при потере устойчивости и последующем выносе в нижний бьеф одной или нескольких секций плотины.

Будем решать систему уравнений (1) при следующих исходных данных, приближенных к реальным:

$$H_0 = 60 \text{ м}; B_0 = 30 \text{ м}; C_d = 0,5; g = 9,81 \text{ м/с}^2;$$

$$V_0 = 10^{10} \text{ м}^3; \alpha = 0,05; A = 0,3^3 \cdot 0,057;$$

$$\bar{H} = \frac{H_0}{2}. \quad (2)$$

Будем считать, что длина плотины по гребню равна 1000 м.

Для данной системы может быть получено точное аналитическое решение, имеющее несложную форму записи. Численное решение системы получим, используя метод Рунге — Кутты — Фельберга — явную одношаговую схему, 4- или 5-этапный метод с адаптивным выбором шага интегрирования, имеющийся в арсенале методов интегрирования программного пакета MapleSoft Maple 14 [6]. Соответствующий текст программы следующий:

$$\begin{aligned} > Cd := 0.5 : g := 9.81 : V0 := 10^{10} : H0 := 60 : H1 := \left(\frac{H0}{2}\right)^{\frac{1}{3}} : \alpha \\ &:= 0.05 : A := 0.3^3 \cdot 0.057 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sys1 := \frac{d}{dt} b(t) &= \frac{\alpha \cdot \sqrt{g} \cdot A}{H1} \cdot \sqrt{h(t)}, \frac{d}{dt} h(t) = -\frac{Cd}{2} \\ &\cdot \frac{\sqrt{g} \cdot H0^2}{V0} \cdot b(t) \cdot \sqrt{h(t)}; \end{aligned}$$

$$Y := dsolve(\{sys1, h(0) = 60, b(0) = 30\}, fcn, type = numeric, range = 0..450000);$$

Графики изменения во времени величин $H(t)$ и $B(t)$ приведены на рис 2.

Целью излагаемой работы было также алгоритмизировать решение задачи о разрушении многосекционных плотин из местных материалов и выработать подход к получению решений системы (1) при расчете разрушения многосекционных бетонных плотин. Проблема заключается в том, что при «подмыве» основания секции течение выносит эту секцию в нижний бьеф, что порождает кусочно-непрерывные решения относительно величины прорана $B(t)$. Приходится решать не одну систему ОДУ, а для каждой секции плотины — свою систему дифференциальных уравнений, при этом «склеивать» решения, полученные на стыках секций плотины.

Процесс интегрирования систем ОДУ для многосекционной плотины можно существенно упростить, сведя их к интегрированию по-прежнему одной системы за счет введения «особых» условий на эту систему — событий при численном интегрировании системы — и определенных алгоритмических действий при достижении этих условий.

Производная величины $B(t)$ выражается явно, входит только в левую часть системы уравнений. Для учета разрывов функции $B(t)$ (при скачкообразных увеличениях ширины прорана при потере устойчивости секций плотины) второе уравнение в (1) для удобства перехода к дискретным методам заменим интегральным соотношением

$$B(t) = B_0 + \int_0^t \alpha \sqrt{g} \frac{A}{\bar{H}^{1/3}} H(t)^{1/2} dt.$$

Таким образом, получим нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Cd}{2} \sqrt{g} \frac{H_0^2}{V_0} B H^{1/2}, \quad H(0) = H_0,$$

$$B(t) = B_0 + \int_0^t \alpha \sqrt{g} \frac{A}{\bar{H}^{1/3}} H(t)^{1/2} dt. \quad (3)$$

Напомним: для существования и единственности решения достаточно выполнения условия

Липшица для вектор-функции правых частей [7]. Формальная запись 2-го уравнения системы (3) в интегральном виде позволяет нам переопределить функцию $B(t)$ в конечном числе точек.

При интегрировании системы численно по явной одношаговой схеме (например, методом Рунге — Кутты) промежуток $[0; t]$ делится на малые интервалы, в каждом из которых значения производной искомой вектор-функции аппроксимируются линейной комбинацией численных значений вектор-функции правых частей в этом интервале.

Здесь: $0 = t_0 < \dots < t_{i-1} < t_i$; отрезок $[t_{i-1}; t_i]$ — участок интегрирования системы (4), а t'_i — «особые» точки, в которых мы задаем разрывы функции $B(t)$; $i = \overline{1, n}$.

Зададим разрывы $B(t)$ при скачкообразных увеличениях ширины прорана при потере устойчивости секций плотины. Для этого переопределим функцию $B(t)$ в точках t'_i , т. е. принудительно присвоим функции $B(t)$ значения B_i в точках t'_i . Для единообразия можно считать, что на каждом участке численного интегрирования $[t_{i-1}; t_i]$ у функции $B(t)$ имеется особенность в точке $t'_i \in (t_{i-1}; t_i)$. Обоснуем возможность применения явной одношаговой схемы интегрирования при правой части, заданной подобным образом. В этом случае правая часть системы (1), в частности производная $B'(t)$, будет не определена в точках t'_i , однако функция $B'(t)$ будет сохранять «липшицевость» всюду на участке интегрирования, за исключением конечного числа особых точек. Итак, запишем:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Cd}{2} \sqrt{g} \frac{H_0^2}{V_0} BH^{1/2}, \quad H(0) = H_0;$$

$$B(t) =$$

$$= \begin{cases} B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t \alpha \sqrt{g} \frac{A}{\bar{H}^{1/3}} H(t)^{1/2} dt, & t_{i-1} \leq t < t'_i \leq t_i; \\ B_i, & t'_i \leq t \leq t_i. \end{cases} \quad (4)$$

Если задавать особенность (скачок) функции $B(t)$ лишь на границе участка интегрирования, т. е. при $t'_i = t_i$, то аппроксимация производных внутри участка (шага) интегрирования по одношаговой явной схеме «не пострадает» —

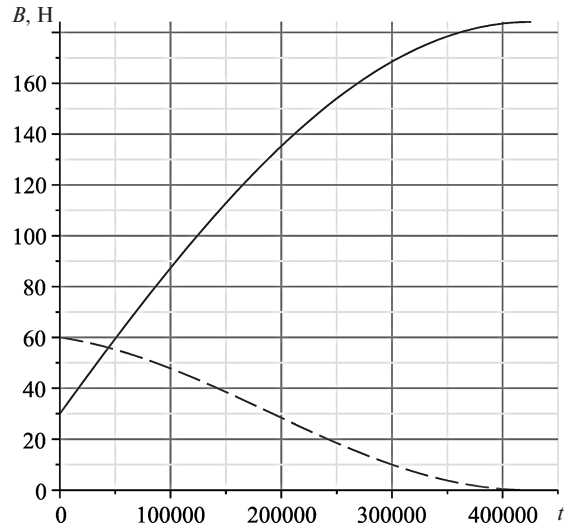


Рис. 2. Графики изменения ширины прорана $B(t)$ (—) и высоты уровня водохранилища $H(t)$ (---)

в случае «бесконечной» производной приближение производной не будет «уходить» на бесконечность. Таким образом, сохраняется выполнение условия Липшица для правой части системы на каждом участке интегрирования, а дискретная схема интегрирования применима в неизменном виде для системы (4) с уравнением, записанным в интегральной форме с переопределенными значениями функции $B(t)$. В результате, допустимо продолжить интегрирование, искусственно преодолев особенности правой части в точках t_i .

Поскольку производная dB/dt в условиях (4) не существует в точках t_i , очевидно, что dH/dt терпит разрыв в точках t_i , как и $B(t)$, однако $H(t)$ является непрерывной функцией.

Получим численное решение системы (4) с учетом построенного алгоритма изменения значений B в особых точках путем интегрирования системы дискретным методом. Будем считать, что все секции плотины имеют одинаковую ширину и разрушаются последовательно в обе стороны вдоль гребня плотины симметрично относительно центральной секции. Для определенности будем также считать, что секция плотины разрушается полностью (то есть секция теряет устойчивость и выносится потоком воды) при размыве основания данной секции на $1/3$ площади секции бетонной плотины, что соответствует экспериментальным данным.

Запишем подробно алгоритм построения особых условий для численного интегрирования системы интегро-дифференциальных уравнений (4), реализованный авторами на языке программирования пакета Maple [6, 7]:

```
> numsects := 33 : seclen := 30 : evts := [ ] :
  broklen := seclen :
  for i from 1 to (numsects - 1) do
    evts := [ op(evts), [ b(t) - eval( broklen + 2/3 * seclen ), b(t)
      = eval( broklen + 2 * seclen ) ] ] :
    broklen := broklen + 2 * seclen :
  end do:
```

Здесь $numsects = 33$ — число секций многосекционной плотины, $seclen = 30$ м — длина каждой секции.

Численное решение системы ОДУ получим вышеуказанным методом Рунге — Кутты — Фельберга с учетом событий, меняющих нормальный ход дискретного метода интегрирования при достижении особых условий:

```
> Y := dsolve( {sys1, h(0) = 60, b(0) = 30}, fcns, type = numeric, events = evts);
```

Графики величин $B(t)$ и $H(t)$ для многосекционной плотины приведены на рис. 3.

Для аналитического решения системы в случае многосекционных плотин уже не построить достаточно простого выражения, поскольку на-

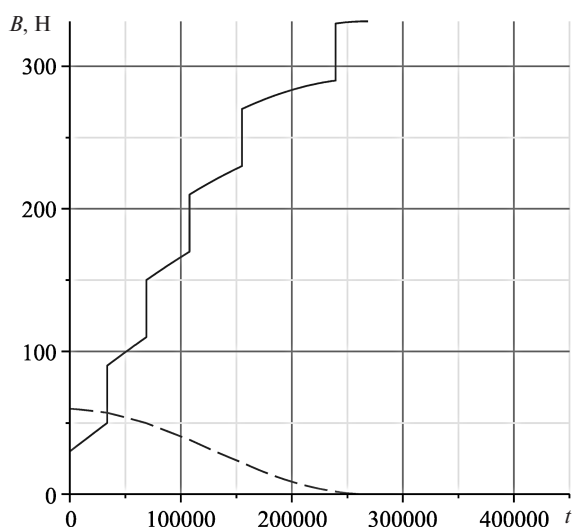


Рис. 3. Графики ширины прорана $B(t)$ (—) и высоты уровня водохранилища $H(t)$ (- - -) для многосекционной бетонной плотины

чальные условия — начальные значения $B(t)$ и $H(t)$ — на последующих участках интегрирования вычисляются на основе конечных значений на предыдущих участках интегрирования.

Практическую ценность представляет мониторинг ширины прорана многосекционной бетонной плотины в полных секциях плотины, когда наблюдения ведутся не за $B(t)$, а за кусочно-постоянной функцией $B_{(1)}(t)$ — суммарным прораном разрушенных секций, который увеличивается только тогда, когда очередная секция плотины смывается течением целиком. Для этого удобно ввести 3-ю (фиктивную) переменную интегрирования $B_{(1)}$, записать для нее дифференциальное уравнение и сформулировать особые условия при численном интегрировании:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Cd}{2} \sqrt{g} \frac{H_0^2}{V_0} BH^{1/2}, \quad H(0) = H_0;$$

$$\frac{dB_{(1)}}{dt} = 0, \quad B_{(1)}(t) = \begin{cases} B(t_{i-1}), & t_{i-1} \leq t < t_i; \\ B(t_i), & t = t_i; \end{cases}$$

$$B(t) =$$

$$= \begin{cases} B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t \alpha \sqrt{g} \frac{A}{\bar{H}^{1/3}} H(t)^{1/2} dt, & t_{i-1} \leq t < t_i, \\ B_i, & t = t_i. \end{cases} \quad (5)$$

Совмещенные графики трех величин — $B_{(1)}(t)$, $B(t)$ и $H(t)$, полученные при интегрировании системы (5) для многосекционной плотины, приведены на рис. 4.

Численное решение задачи разрушения многосекционной бетонной плотины на основании из местных материалов позволяет убедиться в том, что:

1) наличие секций в структуре бетонной плотины на основании из местных материалов приводит к «эскалации» развития прорана, поскольку разрушение плотины нарастает скачкообразно, вплоть до полного слива воды из водохранилища;

2) многосекционная плотина при развитии прорана пострадает значительно меньше односекционной плотины той же ширины (длины вдоль гребня), в частности в силу того, что смыв секций целиком при частичном размыве основания будет ускорять истечение воды из водохранилища;

3) полный слив воды из водохранилища (как для односекционной, так и для многосекционной плотины) ведет к достижению точки «син-



гулярности» решения $\left(\frac{dB}{dt} = 0, H = 0\right)$, «правее» которой численное решение системы ОДУ отсутствует, т. е. в конечной точке интегрирования существует только односторонняя (левая) производная $B'(t) = 0$, о чем своевременно сигнализирует программный пакет Maple.

Построенная физико-математическая модель на основе систем интегро-дифференциальных уравнений (3)–(5) развития прорана многосекционной плотины с основанием из местных материалов, безусловно, уточняет описание механизма разрушения бетонных плотин, приводит к кусочно-непрерывным решениям, которые получены в нашей работе численно. Авторы рассчитывают на развитие данного исследования, предполагающее постановку ряда коммерческих задач, что позволит провести натурные эксперименты для адекватной параметризации модели.

Разработка численного алгоритма, применимого для моделирования процесса разрушения плотин, — задача, актуальная для оценки ущерба от последствий распространения волны прорыва, что послужит объектом дальнейших исследований авторов.

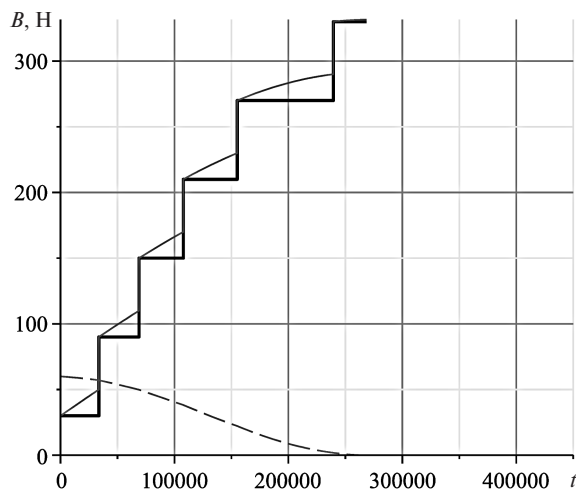


Рис. 4. Графики ширины прорана $B_{(1)}(t)$ (—) в полных секциях, ширины прорана $B(t)$ (—) и высоты уровня водохранилища $H(t)$ (---) для многосекционной бетонной плотины

Научно обоснованный заблаговременный прогноз последствий разрушения плотин необходим для разработки и принятия мер для защиты от возможных последствий или для максимально возможного уменьшения ущерба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розов, А.Л. Действие ядерного взрыва на гидроузел и последствия его разрушения. Физика ядерного взрыва. Т.2 Действие ядерного взрыва [Текст] / А.Л. Розов // М.: Наука, Физматгиз, 1997.— С. 67–78.
2. Rozov, A.L. Modeling of washout of dams [Текст] / A.L. Rozov // Journal of Hydraulic Research.— 2003. Vol. 41. Issue 6.— P. 565–577.
3. Гришин, М.М. Гидротехнические сооружения [Текст] / М.М. Гришин // М.: Энергия, 1968.
4. Малик, Л.К. Факторы риска повреждения гидротехнических сооружений [Текст] / Л.К. Малик //

Проблемы безопасности.— М: Наука, 2005.

5. Лаврентьев, М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат // М.: Наука, 1973.— 416 с.
6. Дьяконов, В.П. Математическая система Maple VR3/R4/R5 [Текст] / В.П. Дьяконов // М.: СОЛОН Пресс, 1998.— 400 с.
7. Холл, Дж. Современные численные методы решения дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Холл, Дж. Уатт.— М.: Мир, 1976.

УДК 621.039.566

В.И. Гуменюк, М.Е. Федосовский, А.А. Сыров, Г.Л. Атоян

ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЗАЩИЩЕННОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИ ВАЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Системы управления (СУ) представляют собой упорядоченный набор средств сбора сведений о подконтрольном объекте и средств воз-

действия на его поведение с целью достижения определенных целей. В качестве объектов управления будем рассматривать опасные производ-