

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЕЛЕЗАЩИТНОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ ПО ИХ ДЛИНЕ

В [1] разработаны новый вид сквозного селезащитного сооружения с рамно-связевой конструкцией и метод его расчета. Данное сквозное сооружение включает поперечные и продольные рамы, состоящие из горизонтальных балочных элементов и вертикальных стоек, еще в состав сооружения входит вертикальное ядро жесткости (рис. 1).

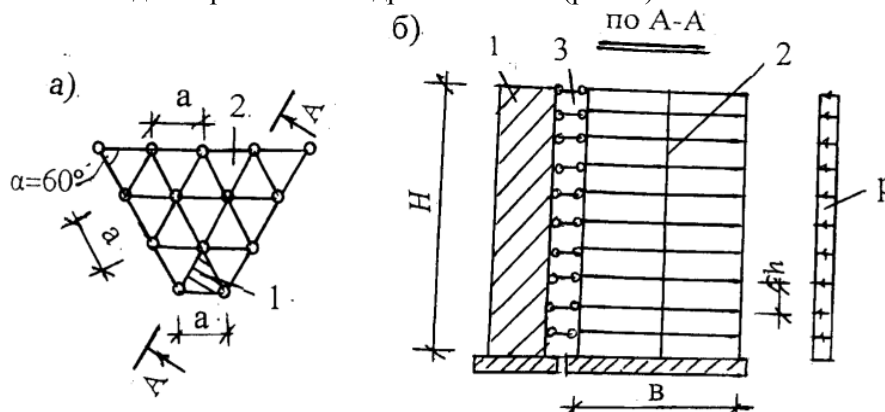


Рис. 1. Расчетная схема рамно-связевого пространственного блока селезащитного сооружения
a – конструктивная схема в плане; *б* – расчетная схема; 1 – ядро жесткости; 2 – рамы; 3 – стержни-связи

В рамно-связевой системе, которая также применяется в высотных зданиях, горизонтальные нагрузки воспринимаются вертикальными ядрами или диафрагмами. При расчете указанных выше железобетонных ядер жесткости и диафрагм необходимо учитывать их собственный вес, который распределен по длине вертикальных элементов-стержней.

1. Рассмотрим задачу об устойчивости вертикального стержня с постоянным по длине сечением под действием силы собственного веса (рис. 2).

Обозначив силу веса, приходящуюся на единицу длины ℓ , через g , находим в сечении x оптимальную силу $P_x = g \cdot x$ и поперечную силу

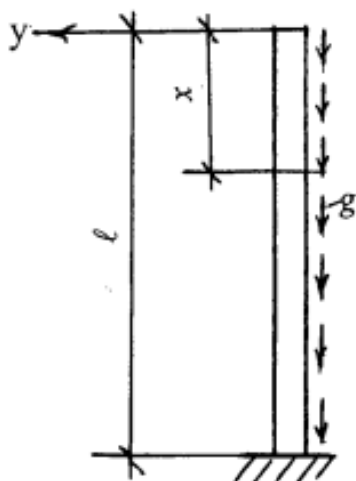


Рис. 2. К решению первой задачи

$$Q = P_x \frac{dv}{dx} = gx \frac{dv}{dx}. \quad (1)$$

А дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид [2].

$$EJ \frac{d^2v}{dx^2} + P \cdot v = 0, \quad (2)$$

где EJ – жесткость стержня.

Уравнение (2) преобразуем к виду

$$EJ \frac{d^3v}{dx^3} + P \frac{dv}{dx} = 0. \quad (3)$$

В (3) подставляя значение Q из уравнения (1) получим

$$EJ \frac{d^3v}{dx^3} + gx \frac{dv}{dx} = 0. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$\frac{x}{\ell} = \xi, \quad \frac{dv}{d\xi} = \omega, \quad \frac{g\ell^3}{EJ} = a^2 \quad (5)$$

и после соответствующих преобразований получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^2} + a^2\xi\omega = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение интегрируется в бесселевых функциях и решение имеет вид [3].

$$\omega = A \cdot \omega^2 J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}a\xi^{\frac{3}{2}}\right) + B \cdot \xi^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}a\xi^{\frac{3}{2}}\right) \quad (7)$$

Здесь $J_{\frac{1}{3}}$ и $J_{-\frac{1}{3}}$ - бесселевые функции первого рода.

Дифференцируя (7), получаем

$$\frac{d\omega}{d\xi} = A \cdot a\xi J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}a\xi^{\frac{3}{2}}\right) - Ba\xi J_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}a\xi^{\frac{3}{2}}\right)$$

Составим граничные условия по рис. 2

$$\text{При } x = 0 \quad M = -EJ \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (8)$$

$$x = \ell \quad \frac{dv}{dx} = 0;$$

или при $\xi = 0 \quad \frac{d\omega}{d\xi} = 0$; и при $\xi = 1 \quad \omega = 0$.

Как известно [4], что: а) функция $J_{\frac{1}{3}}(\xi) = 0$ при $\xi = 0$ и $v = \frac{1}{3}$; б) $\xi = 0$ и $v = -\frac{2}{3}$ функция $J_{-\frac{2}{3}}(0) = \infty$

Из первого условия (8) с учетом вышеизложенного находим, что $A = 0$, тогда $B \neq 0$ и из второго условия (8) имеем

$$J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}a\right) = 0 \quad (9)$$

Функция Бесселя $J_{-\frac{1}{3}}$ будет равна нулю при аргументе

$$\frac{2}{3}a = 1,866 \quad (10)$$

И по (5) находим

$$g_{кр} \cdot \ell = a^2 \frac{EJ}{\ell^2} = 7,84 \frac{EJ}{\ell^2}, \quad (11)$$

т.е. по формуле (11) определяется значение критической силы в виде собственного веса.

2. Далее рассмотрим задачу об устойчивости вертикального стержня с постоянным по длине сечением под действием нагрузки, распределенной по треугольнику (рис. 3).

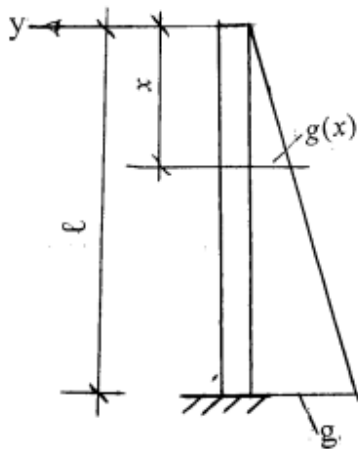


Рис. 3. К решению второй задачи

Значения сжимающей и поперечной сил в сечении x равняются соответственно при

$$g_{(x)} = \frac{g \cdot x}{\ell}; \quad (12)$$

$$P_x = g(x) \cdot \frac{x}{2} = \frac{gx^2}{2\ell} \text{ и } Q = P_x \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{gx^2}{2\ell} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Подставляя (12) в уравнение (3) будем иметь

$$EJ \frac{d^3v}{dx^3} + \frac{gx^2}{2\ell} \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \quad (13)$$

Аналогично первой задаче введем обозначения

$$\frac{x}{\ell} = \xi; \quad \frac{dv}{d\xi} = \omega, \quad a^2 = \frac{g\ell^3}{2EJ}. \quad (14)$$

Далее получим уравнение

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + a^2 \xi^2 \omega = 0. \quad (15)$$

Это уравнение интегрируется в бесселевых функциях и решение записывается в виде [5]:

$$\omega = A \cdot \xi^{1/2} J_{1/4} \left(\frac{a}{2} \xi^2 \right) + B \xi^{1/2} N_{1/4} \left(\frac{a}{2} \xi^2 \right), \quad (16)$$

где $J_{1/4}$ - функция Бесселя первого рода;

$N_{1/4}$ - функция Неймана. Вместе с $N_{1/4}$ () можно взять $J_{1/4}$ () при $\nu = 1/4$.

Тогда уравнение (16) перепишем

$$\omega = A \cdot \xi^{1/2} J_{1/4} \left(\frac{a}{2} \xi^2 \right) + B \xi^{1/2} J_{-1/4} \left(\frac{a}{2} \xi^2 \right), \quad (17)$$

Дифференцируя (17) получаем

$$\frac{d\omega}{d\xi} = A \cdot a \xi^{3/2} \cdot J_{-3/4} \left(\frac{a}{2} \xi^2 \right) - B \cdot \xi^{3/2} \cdot J_{+3/4} \left(\frac{a}{2} \xi^2 \right) \quad (18)$$

Составим граничные условия по рис. 2.

при $x = 0$. $M = -EJ \frac{d^2\omega}{dx^2} = 0$.

$x = \ell$ $\frac{dv}{dx} = 0$

или при $\xi = 0$ $\frac{d\omega}{d\xi} = 0$ и при $\xi = 1$ $\omega = 0$.

Как известно [4], а) при $\xi = 0$ и $\nu = 1/3$ функция $J_{1/4}(\xi) = 0$;

б) при $\xi = 0$ и $\nu = -2/3$ функция $J_{-2/3}(0) = \infty$

По условию $x = \ell$, $\omega = 0$ и $A = 0$, при этом $B \neq 0$.

Тогда из условия $\xi = 0$

$$J_{-1/4}\left(\frac{a}{2}\right) = 0. \quad (19)$$

Из [4] находим $\frac{a}{2} = 2,001$ или $a = 4,002$.

Далее по уравнению (14) находим

$$\frac{g \cdot \ell}{2} = a^2 \frac{EJ}{\ell} \text{ или } \frac{g_{кр} \cdot \ell}{2} = 16 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (20)$$

3. В третьей задаче рассматривается устойчивость вертикального стержня с постоянным по длине сечением, под действием нагрузки, распределенной по треугольнику согласно рис. 4.

Данная задача решается аналогично задаче №2, но с другими граничными условиями, т.е. и в решении задачи воспользуемся уравнениями (15), (16), (17) и (18).

Далее составим граничные условия по рис. 4 при $x = 0$ $\frac{d\omega}{dx} = 0$

$$x = \ell \quad M = -EJ \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \text{ или} \quad (21)$$

при $\xi = 0$. $\omega = 0$

$$\xi = 1 \quad \frac{d\omega}{d\xi} = 0$$

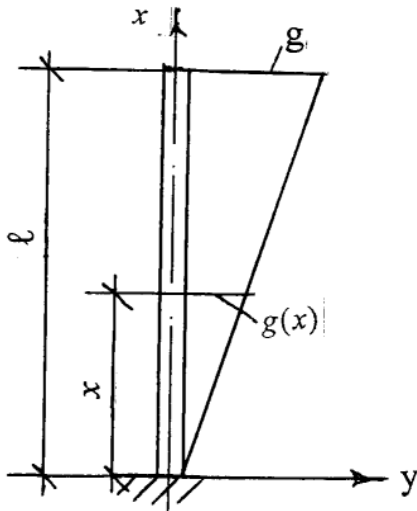


Рис. 4. К решению третьей задачи

Согласно граничных условий (21), из уравнения (17) имеем:

при $\xi = 0$ и при $v = 1/4$ функции равны $J_{1/4}(0) = 0$ и $J_{-3/4}(0) = \infty$

Из первого условия (21) с учетом вышеизложенного находим что $A \neq 0$, тогда $B = 0$ и из второго условия (21) по уравнению (18) имеем:

$$J_{-3/4}\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \quad (22)$$

и из [4] находим $\frac{a}{2} = 1,13$, тогда $a = 2,26$

Далее по уравнению (14) находим

$$\frac{g\ell}{2} = a^2 \frac{EJ}{\ell^2} \text{ или } \frac{g_{кр} \cdot \ell}{2} = 5,108 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (23)$$

1. Решим первую задачу приближенным способом. В случае действия на стержень распределенной нагрузки g , то сила переносится на верх стержня и данная продольная сила приравнивается эйлеровой силе стержня (стойки), защемленной одним концом [6] (рис.5), т.е.

$$P_{прив.} = \int g(x) \cdot dx \cdot \mu(x) = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2}, \quad (24)$$

где $\mu(x) = \frac{x^2}{\ell^2}$ - поправочный коэффициент

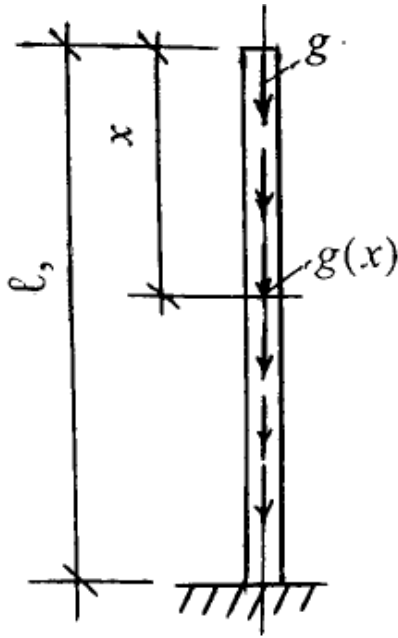


Рис. 5. К решению первой задачи приближенным способом

Равенство (24) – это основное равенство, из которого определяется параметр нагрузки и имеем

$$P_{\text{прив.}} = \int_0^{\ell} g_{\text{кр.}} \cdot dx \cdot \frac{x^2}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2}, \quad (25)$$

$$\text{отсюда } g_{\text{кр.}} \frac{x^3}{3\ell^2} \Big|_0^{\ell} = g_{\text{кр.}} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2} \quad (26)$$

$$\text{или } g_{\text{кр.}} \cdot \ell = 7,4 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (27)$$

Точное решение дано в (11) $g_{\text{кр.}} \cdot \ell = 7,84 \frac{EJ}{\ell^2}$ и

расхождение составляет $\frac{7,84 - 7,4}{7,84} 100\% = 5,70\%$.

$$P_{\text{прив.}} = \int_0^{\ell} g_{\text{кр.}} \cdot dx \cdot \frac{x^2}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2},$$

5. Решение второй задачи приближенным способом.

Из рис. 6 находим значение $g(x)$ в сечении x

$$g(x) = \frac{g(\ell - x)}{\ell} \quad (28)$$

Подставляя значение $g(x)$ в уравнение (24) получим

$$P_{\text{прив.}} = \int_0^{\ell} \frac{g(\ell - x)}{\ell} dx \cdot \frac{x^2}{\ell^2} = \int_0^{\ell} \frac{g\ell \cdot x^2 dx}{\ell^3} - \int_0^{\ell} \frac{gx}{\ell} \cdot \frac{x^2}{\ell^2} dx =$$

$$\frac{g\ell \cdot x^3}{3\ell^3} \Big|_0^{\ell} - \frac{gx^4}{4\ell^3} \Big|_0^{\ell} = \frac{g\ell}{12}.$$

$$\text{Тогда } \frac{g_{\text{кр.}} \cdot \ell}{2} = 14,79 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (29)$$

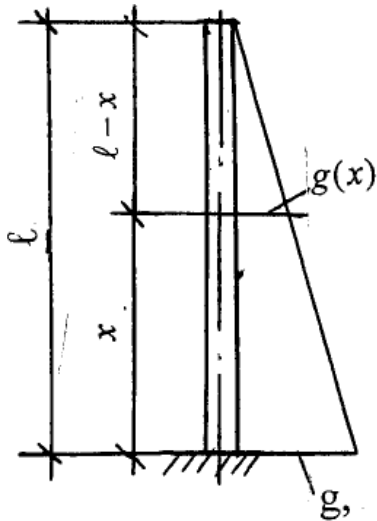


Рис. 6. К решению второй задачи приближенным способом

Точное решение дано в (20) $g_{\text{кр.}} \frac{\ell}{2} = \frac{16 \cdot EJ}{\ell^2}$

Расхождение составляет $\frac{16 - 14,79}{16} 100\% = 7,56\%$

б) Решение третьей задачи приближенным способом (рис. 7) при $g(x) = \frac{g \cdot x}{\ell}$, тогда

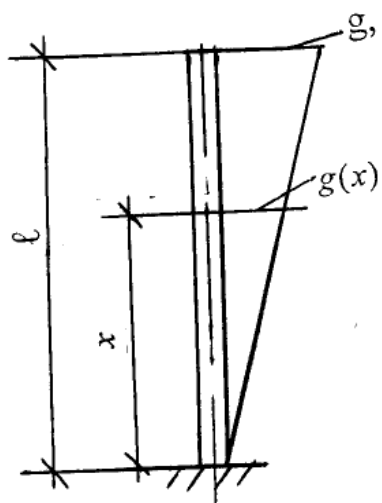


Рис. 7. К решению третьей задачи приближенным способом

$$P_{прив.} = \int_0^l \frac{gx \cdot x^2}{l \cdot l^2} dx = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2};$$

$$\text{Далее } P_{прив.} = \int_0^l \frac{gx^3}{l^3} dx = \frac{gx^4}{4l^3} \Big|_0^l = \frac{gl^4}{4l^3} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2};$$

Тогда окончательно получим

$$\frac{g_{пр.} \cdot l}{2} = 4,935 \frac{EJ}{l^2}$$

Точное решение получено в (23) и равно

$$\frac{g_{кр} \cdot l}{2} = 5,108 \frac{EJ}{l^2}.$$

Расхождение составляет

$$\frac{5,108 - 4,935}{5,108} \cdot 100\% = 3,4\%.$$

Таким образом, интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка в бесселевых функциях дают точные решения при определении величин критических сил, приложенных по длине вертикальных элементов сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байнатов Ж.Б, Тулебаев К.Р. Методы расчета стержневых селезащитных сооружений /ж. Промышленное строительство и инженерные сооружения. – Киев., 2008г, №3. С. 26-31.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.Физматгиз., 1963. – 880с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям., изд. 5-е – М.: Наука, 1976., - 576с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией М.Абрамовица и С. Стиган. – М.: Наука. 1979. – 832с.
5. Кузнецов Д.С. Специальные функции. 2-изд. – М.: Высшая школа, 1965. – 424с.
6. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. 2-изд. –М.: Стройиздат, 1964. – 332с.

Резюме

Мақалада селден қорғайтын ғимараттың вертикаль элементтерінің – қаттылық ядросының бойымен әсер ететін күштің әсеріне орнықтылығы қарастырылды. Үш есеп шешілді: ұзындығында тұрақты қимасы бар вертикаль стержннің меншікті салмағының әсеріне орнықтылығы анықталған бір есеп, ұзындығында тұрақты қимасы бар вертикаль стержннің үшбұрышты күш әсеріне орнықтылығы анықталған екі есеп. Құрылған біртекті дифференциалды теңдеулер Бессель функцияларды қолданылып шешіледі және элементтердің сынақты жағдайларын анықтайтын формулалар алынды.

Summary

Stiffness of upright elements - stiffening cores of mud construction under effect of forces, applied lengthwise has been considered in the article.

The following issues have been solved:

One issue: on stiffness of the upright core with uniform cross-section lengthwise under its dead weight; two issues on solution on stiffness of the upright core with uniform cross-section lengthwise under effect of loads arranged as triangle lengthwise. Formed uniform differential equations can be solved by use of besselevykh functions, and formulas for buckling load determination have been found.