УДК 556.536:627.222

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ МАСС ПОД ПЛОТИНОЙ

Палуанов Д.Т. , Бекмамадова Г.А.
(НИИИВП при ТИИМ)

При проектировании гидротехнических сооружений (плотин), возводимых на аллювиальных отложениях, вопрос деформации основания плотин, имеет очень большое значение. По оценкам экспертов аварии плотин во всем мире происходят, в основном, из-за перемещения и движения грунтовой массы в основании плотин. Это создает серьезную проблему для проектировщиков и строителей. В связи с этим, исследование перемещения и движения грунтовой массы под плотиной является весьма актуальным.

Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о стационарном течении грунтовой массы (смеси воды и грунта), находящейся под плотиной [1]. Над поверхностями грунта расположено водохранилище G_0^* и G_1^* со свободными поверхностями S_0, S_1^* (с соответствующими глубинами, которые равны H_0 и H_1, где: $H_0 > H_1$, (ширина которых равна b, плотина имеет длину L, высоту H) на свободных поверхностях S_0 и S_1^*, давление атмосферное и постоянно вдоль этих поверхностей.

Вследствие напора воды в водохранилище возникает гидродинамическое давление фильтрационного потока воды в грунте. В силу тяжести плотины происходит сжатие грунтовой поверхности, которое передается по толщине вглубь грунтового слоя. Область G_1 и G_2 грунтовые слои с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2, где: $k_1 > k_2$. Грунт под плотиной деформируется и получим задачу о штампе, когда дно плотины - горизонтальная прямая (рис. 1).

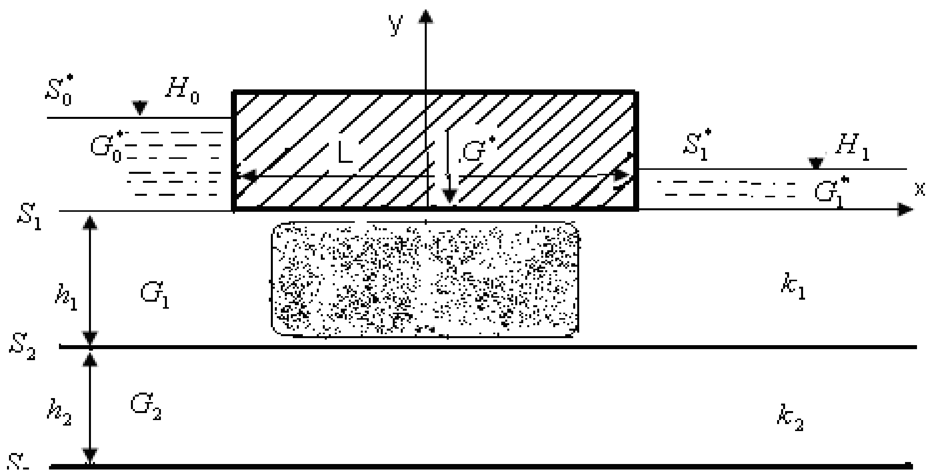

Рис. 1 - Расчетная схема движущегося слоя

S_1 – дно водохранилища и поверхность соприкосновения поверхности грунта. Областью течения под плотиной будут:

$G_1 - \{x \in (-\infty;\infty);\ y \in (-h_1;0)$ с проницаемостью k_1

$G_2 - \{x \in (-\infty;\infty);\ -(h_1 + h_2) < y < -h_1$ проницаемости k_2.

Вследствие давления плотины в слоях грунта происходят деформации, описываемые перемещениями частиц. Чем глубже, тем меньше будет перемещение частиц грунта. Поэтому можно считать, что перемещение частиц слоя G_1 будет намного больше, чем перемещение частиц в слое G_2. Так, в области G_1 будет совместное перемещение частиц грунта и частиц протекающей воды, а в области G_2 практически будет лишь фильтрационный поток, дебит которого намного меньше, чем дебит воды в области G_1.

Рассматривается движение грунтовой массы в модели Рахматуллина [2], уравнение стационарного движения грунтовой массы в областях $G_m \quad (m=\overline{1,2})$ будет записано в виде:

$$\rho_n^{(m)}\left[u_n^{(m)}\frac{\partial u_n^{(m)}}{\partial x}+\vartheta_n^{(m)}\frac{\partial \vartheta_n^{(m)}}{\partial y}\right]=-f_n^{(m)}\frac{\partial P_n}{\partial x}+f_n^{(m)}\mu_n^{(m)}\frac{\partial u_n^{(m)}}{\partial {y_n^{(m)}}^2}+k^{(m)}\left(u_p^{(m)}-u_n^{(m)}\right) \tag{1}$$

Уравнение неразрывности (при отсутствии фазового превращения):

$$\frac{\partial\left(\rho_n^{(m)}u_n^{(m)}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho_n^{(m)}\vartheta_n^{(m)}\right)}{\partial y}=0 \tag{2}$$

где: $\vec{\vartheta}_n^{(m)}, u_n^{(m)}, \vartheta_n^{(m)}$ – вектор скорости и ее компоненты по горизонтальному и вертикальному направлениями n-ой фазы в m - том слое, $n,m=(\overline{1,2})$;

$f_n^{(m)}, \rho_n^{(m)}, \rho_{ni}^{(m)}$ – концентрации и приведенные истинные плотности n-ой фазы в m - ном слое потока;

$P^{(m)}$ – давление в m - ном слое потока;

$\mu_n^{(m)}=\rho_n^{(m)}\nu_n^{(m)}$ – динамический коэффициент вязкости n-ой фазы в m - ном слое;

$\nu_n^{(m)}$ – динамический коэффициент вязкости n-ой фазы в m - ном слое;

$k^{(m)}$ – коэффициент взаимодействия фаз смеси в областях G_1 и G_2.

Для концентрации смеси имеем равенство:

$$f_n^{(m)}=k^{(m)}f_{ni}^{(m)} \text{ и } f_{1i}^{(m)}+f_{2i}^{(m)}=1 \tag{3}$$

Также можно вывести выражения плотностей и вектора скорости смеси:

$$\rho_{см}^{(m)}=\rho_1^{(m)}+\rho_2^{(m)},\ \vec{\vartheta}_{см}^{(m)}=\frac{1}{\rho_{см}^{(m)}}\left[\rho_1^{(m)}\vec{\vartheta}_1^{(m)}+\rho_2^{(m)}\vec{\vartheta}_2^{(m)}\right] \tag{4}$$

при постоянстве истинных плотностей обоих фаз $\left(\rho_{ni}^{(m)}=const\right)$ и коэффициентов фильтрации $k^{(m)}$, из уравнения неразрывности (2) и равенства (3) имеем выражение для скоростей обоих фаз данной смеси:

$$f_1^{(m)}u_1^{(m)}+f_2^{(m)}u_2^{(m)}=A_0^{(m)}, \text{ где } A_0^{(m)}=f_{10}^{(m)}u_{10}^{(m)}+f_{20}^{(m)}u_{20}^{(m)} \tag{5}$$

отсюда находим выражение скоростей несущей фазы в виде:

$$f_1^{(m)}u_1^{(m)}=-f_2^{(m)}u_2^{(m)};\ f_1^{(m)}\vartheta_1^{(m)}=-f_2^{(m)}\vartheta_2^{(m)} \tag{6}$$

Здесь предположено, что $u_{10}^{(m)}=0$, $u_{20}^{(m)}=0$, $\vartheta_n^{(m)}=0$, т.е. происходит медленное фильтрационное течение.

Слагая системы уравнения для каждой смеси получим уравнение в областях G_1 и G_2, т.е. уравнение движения (1) с учетом уравнения неразрывности можно написать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_n^{(m)}\left(u_n^{(m)}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_n^{(m)}u_n^{(m)}\vartheta_n^{(m)}\right]=-f_n^{(m)}\frac{\partial P}{\partial x}+f_n^{(m)}\mu_n^{(m)}\frac{\partial^2 u_n^{(m)}}{\partial y^2}+k^{(m)}\left(u_p^{(m)}-u_n^{(m)}\right)$$

или для каждой фазы смеси в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1^{(m)}\left(u_1^{(m)}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_1^{(m)}u_1^{(m)}\vartheta_1^{(m)}\right]=-f_1^{(m)}\frac{\partial P}{\partial x}+f_1^{(m)}\mu_1^{(m)}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial y^2}+k^{(m)}\left(u_2^{(m)}-u_1^{(m)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_2^{(m)}\left(u_2^{(m)}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_2^{(m)}u_2^{(m)}\vartheta_2^{(m)}\right]=-f_2^{(m)}\frac{\partial P}{\partial x}+f_2^{(m)}\mu_2^{(m)}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial y^2}+k^{(m)}\left(u_1^{(m)}-u_2^{(m)}\right)$$

Сложив их, получим уравнение в виде:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1^{(m)}\left(u_1^{(m)}\right)^2+\rho_2^{(m)}\left(u_2^{(m)}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_1^{(m)}u_1^{(m)}\vartheta_1^{(m)}+\rho_2^{(m)}u_2^{(m)}\vartheta_2^{(m)}\right]=
$$
$$
=-\frac{\partial P}{\partial x}+f_1^{(m)}\mu_1^{(m)}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial y^2}+f_2^{(m)}\mu_2^{(m)}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial y^2} \tag{7}
$$

а также, пользуясь уравнениями движения и неразрывности можно написать в виде:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[f_1^{(m)}u_1^{(m)}\vartheta_1^{(m)}+\hat{\rho}^{(m)}f_2^{(m)}u_2^{(m)}\vartheta_2^{(m)}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[f_1^{(m)}\vartheta_1^{(m)2}+\hat{\rho}^{(m)}f_2^{(m)}\vartheta_2^{(m)2}\right]=
$$
$$
=-\frac{\partial P}{\partial y}+f_1^{(m)}\mu_1^{(m)}\frac{\partial^2 \vartheta_1^{(m)}}{\partial y^2}+f_2^{(m)}\mu_2^{(m)}\frac{\partial^2 \vartheta_2^{(m)}}{\partial y^2} \tag{8}
$$

Учитывая слабую проницаемость нижнего слоя (область G_2), т.е. $k_1 >> k_2$, рассмотрим только верхний слой обозначенной области (G_1). Как было сказано выше, верхний индекс (m) будет отсутствовать в уравнениях (1), (2), (3), (4), (7) и (8), т.е. будем иметь:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 u_1^2+\rho_2 u_2^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_1 u_1\vartheta_1+\rho_2 u_2\vartheta_2\right]==-\frac{\partial P}{\partial x}+f_1\mu_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+f_2\mu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \tag{9}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 u_1\vartheta_1+\rho_2 u_2\vartheta_2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_1\vartheta_1^2+\rho_2\vartheta_2^2\right]+f_1\mu_1\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y^2}+f_2\mu_2\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial y^2} \tag{10}
$$

При этих условиях в уравнение (5) характерный коэффициент будет равен $A_0=0$, отсюда получим равенство $\vartheta_{20}=-\dfrac{f_{10}}{1-f_{10}}u_{20}$:

$$
\rho_1 u_1^2+\rho_2 u_2^2=\rho_{1i}u_2^2\lambda;\ \rho_1 u_1\vartheta_1+\rho_2 u_2\vartheta_2=\rho_{1i}u_2\vartheta_2\lambda;
$$
$$
\rho_1\vartheta_1^2+\rho_2\vartheta_2^2=\rho_{1i}\vartheta_2^2\lambda;\ \lambda=\frac{\rho-(\rho-1)f_2}{1-f_2};\ \rho=\frac{\rho_{2i}}{\rho_{1i}}.
$$

Проведем упрощения в уравнениях (9) и (10), для этого сделаем следующие преобразования:

$$
\rho_1 u_1^2+\rho_2 u_2^2=\rho_{1i}f_1u_1^2+\rho_{2i}f_2u_2^2=\rho_{1i}\left[f_1u_1^2+\rho f_2u_2^2\right]=\rho_{1i}\left[\frac{(f_1u_1)^2}{f_1}+\frac{(f_2u_2)^2}{f_2}\rho\right]=
$$
$$
=\rho_{1i}\frac{(f_2u_2)^2(f_2+\rho f_1)}{f_1f_2}=\rho_{1i}\frac{f_2^2u_2^2(f_2+\rho f_1)}{f_1f_2};
$$
$$
\rho_1 u_1^2+\rho_2 u_2^2=\rho_{1i}\frac{f_2}{f_1}(f_2+\rho f_1)u_2^2;\ \rho_1\vartheta_1^2+\rho_2\vartheta_2^2=\rho_{1i}\frac{f_2}{f_1}(f_2+\rho f_1)\vartheta_1^2
$$
$$
\rho_1u_1\vartheta_1+\rho_2u_2\vartheta_2=\rho_{1i}f_1u_1\vartheta_1+\rho_{2i}f_2u_2\vartheta_2=\rho_{1i}\left[\frac{f_1u_1f_1\vartheta_1}{f_1}+\rho\frac{f_2u_2f_2\vartheta_2}{f_2}\right]=
$$
$$
=\rho_{1i}\left[\frac{(-f_2u_2)(-f_2\vartheta_2)}{f_1}+\rho\frac{f_2u_2f_2\vartheta_2}{f_2}\right]=\rho_{1i}\left[\frac{f_2^2\vartheta_2u_2}{f_1}+\rho\frac{f_2^2u_2\vartheta_2}{f_2}\right]=
$$
$$
=\rho_{1i}\frac{f_2^2}{f_1f_2}\vartheta_2u_2\left[f_2+\rho f_1\right]=\rho_{1i}\vartheta_2u_2f_2\frac{(f_2+\rho f_1)}{f_1};
$$
$$
\rho_1u_1\vartheta_1+\rho_2u_2\vartheta_2=\rho_{1i}u_2\vartheta_2;\ a=\frac{f_2}{f_1}(f_2+\rho f_1)
$$

$$\begin{cases}\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 = \rho_{1i} a u_2^2 \\ \rho_1 \vartheta_1^2 + \rho_2 \vartheta_2^2 = \rho_{1i} a \vartheta_2^2 \\ \rho_1 u_1 \vartheta_1 + \rho_2 u_2 \vartheta_2 = \rho_{1i} u_2 \vartheta_2 a\end{cases} \tag{11}$$

Касательное напряжение смеси определяется равенствами:

$$\tau_{xy.см} = f_1\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + f_2\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial^2 f_1 u_1}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 f_2 u_2}{\partial y^2} = \mu_2 \frac{\partial^2 f_2 u_2}{\partial y^2} - \mu_1 \frac{\partial^2 f_2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (f_2 u_2)}{\partial y^2}(\mu_2 - \mu_1) \tag{12}$$

Поставим равенство (11) в уравнении (9) и (10), решение приведено в [3,4]. Таким образом, получим уравнение для распределения скоростей второй фазы смеси:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(u_2\vartheta_2) = -\lambda \frac{\partial P}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_2\vartheta_2}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2^2}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial P}{\partial x} + b\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial y^2}\end{aligned}\right\}$$

Проведем интегрирование по поперечному сечению потока

$$\left.\begin{aligned}\int_0^y \frac{\partial u_2^2}{\partial x} dy + \int_0^y \frac{\partial u_2\vartheta_2}{\partial y} dy = -\lambda \int_0^y \frac{\partial P}{\partial x} dy + b\int_0^y \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} dy \\ \int_0^y \frac{\partial u_2\vartheta_2}{\partial x} dy + \int_0^y \frac{\partial u_2\vartheta_2}{\partial y} dy = -\lambda \int_0^y \frac{\partial P}{\partial x} dy + b\int_0^y \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial y^2} dy\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

имея следующие граничные условия в областях G_1 и G_2.

Если $y = 0$ $u_1(x,0) = 0$ $\vartheta_1(x,0) = \vartheta_{10}$

$y = -h_1$ $u_1(x,0) = \vartheta_1^{(I)}(x,-h_1) = \vartheta_1^{(m)}(x,-h_1)$ $\vartheta_1^{(II)}(x;-h_1 - h_2) = 0$ $\vartheta_2^{(III)}(x;-h_1 - h_2) = 0$

Из систем уравнений (4), (5) и (6) имеем выражение скоростей первой и второй фазы через скорость частиц смеси:

$$\left.\begin{aligned}u_1 f_1 = \frac{A_0\rho}{\rho-1} - \frac{(f_1+\rho f_2)}{\rho-1}u_{см} \\ u_2 f_2 = -\frac{A_0}{\rho-1} + \frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}u_{см}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\vartheta_1 f_1 = \frac{B_0\rho}{\rho-1} - \frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\vartheta_{см} \\ \vartheta_2 f_2 = \frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\vartheta_{см} - \frac{A_0}{\rho-1}\end{aligned}\right\}$$

$$(u_2 f_2)^2 = \left(\frac{A_0\rho}{\rho-1}\right)^2 - \frac{2A_0}{\rho-1}\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}u_{см} + \left(\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\right)^2 u_{см}^2;$$

$$(\vartheta_2 f_2)^2 = \left(\frac{A_0\rho}{\rho-1}\right)^2 - \frac{2A_0}{\rho-1}\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\vartheta_{см} + \left(\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\right)^2 \vartheta_{см}^2;$$

$$u_2 f_2 \vartheta_2 f_2 = \left(\frac{A_0\rho}{\rho-1} - \frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}u_{см}\right) + \left(\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\vartheta_{см} - \frac{A_0}{\rho-1}\right) = \frac{A_0^2\rho}{(\rho-1)^2} = \frac{A_0}{\rho-1}\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\vartheta_{см} - $$
$$- \frac{A_0^2\rho}{(\rho-1)^2} - \frac{f_1+\rho f_2}{(\rho-1)^2}\vartheta_{см}u_{см} - \frac{A_0}{\rho-1} - \frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}u_{см};$$

$$u_2 f_2 \vartheta_2 f_2 = \frac{f_1+\rho f_2}{(\rho-1)^2};$$

$$u_2 f_2 \vartheta_2 f_2 = \frac{A_0^2\rho}{(\rho-1)^2} + \frac{A_0(f_1+\rho f_2)(\rho\vartheta_{см} - u_{см})}{\rho-1} + \left(\frac{f_1+\rho f_2}{\rho-1}\right)^2 u_{см}\vartheta_{см};$$

$$u_2 f_2 \vartheta_2 f_2 = -\frac{A_0 B\rho}{(\rho-1)^2} + \frac{A_0 (f_1 + \rho f_2)(\rho \vartheta_{см} - u_{см})}{\rho - 1} + \left(\frac{f_1 + \rho f_2}{\rho - 1}\right)^2 u_{см} \vartheta_{см} .$$

При $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ имеет место равенство $u_{10} f_{10} = -f_{20} u_{20}$

$$(u_2 f_2)^2 = \frac{(f_1 + \rho f_2)^2}{(\rho-1)^2} u_{см}^2 , (\vartheta_2 f_2)^2 = \frac{(f_1 + \rho f_2)^2}{(\rho-1)^2} \vartheta_{см}^2 \qquad (14)$$

$$u_1 \vartheta_1 = \frac{1}{f_1^2} (f_1 u_1)(f_1 \vartheta_1) = \left(-\frac{f_1 + \rho f_2}{\rho - 1}\right) u_{см} \left(-\frac{f_1 + \rho f_2}{\rho - 1}\right) \vartheta_{см}$$

$$u_1 \vartheta_1 = \left(\frac{f_1 + \rho f_2}{\rho - 1}\right)^2 u_{см} \vartheta_{см} ,$$

где равенство для начальных скоростей через скорости смеси:

$$u_{20} = \frac{1 + (\hat{\rho} - 1)}{f_{20} (\hat{\rho} - 1)} \overset{0}{u}_{см} , \ \vartheta_{20} = \frac{1 + (\hat{\rho} - 1) f_{20}}{f_{20} (\hat{\rho} - 1)} \overset{0}{\vartheta}_{см} \qquad (15)$$

$$u_{20} = \frac{1 + (\hat{\rho} - 1) f_{20}}{f_{20} (\hat{\rho} - 1)} \overset{0}{u}_{см} = \frac{1 + (\hat{\rho} - 1) f_{20} \overset{0}{u}_{см}}{f_{20} (\hat{\rho} - 1)} \qquad (16)$$

Таким образом, решены задачи движения и установлены начальные скорости грунтовой массы, находящейся в основании плотины.

Выводы. При проектировании низконапорных плотин на аллювиальных отложениях особое внимание нужно обратить на расчеты движения грунтовой массы, образовавшейся в основании сооружений. На основе использования дифференциального уравнения движения грунтовой массы в основании разработана гидравлическая задача для оценки безопасности низконапорных плотин.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Палуанов Д.Т. Установление критериев безопасности основания гидротехнических сооружений // Сб. науч. трудов, посвященный 85-летию Института САНИИРИ. – Ташкент, 2010. – С. 178-183.

2. Рахматуллин Х.А. Газовая волновая динамика. – М.: Изд. МГУ, 1962.

3. Хамидов А.А. Плоские и осесимметрические струйные течения идеальной несжимаемой жидкости. – Т.: Наука, 1978.

4. Хамидов А.А., Худайкулов С.И. Теория струй многофазной вязкой жидкости. – Т.: Фан, 2005. – 120 с.